

УДК 621.396.67

## МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДВУХЭЛЕМЕНТНОГО ПРОВОЛОЧНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Ю.Н. ЕГОРОВ, В.В. ГЛАДЕЙЧУК

*Военная академия Республики Беларусь, Республика Беларусь*

*Поступила в редакцию 17 мая 2018*

**Аннотация.** Разработана методика численного решения внутренней задачи для двухэлементного проволочного излучателя на основе интегрального уравнения Поклингтона. Методика отличается высокой точностью решения, не требует его проверки на сходимость, оптимизирована по вычислительным затратам и может быть обобщена применительно к антеннам с несколькими пассивными элементами.

*Ключевые слова:* проволочные антенны, численные методы.

**Abstract.** The methodology of the numerical solution of the internal problem for a two-element wire radiator based on the Pocklington integral equation is developed. The methodology is highly accurate, does not require its verification for convergence, is optimized for computational costs, and can be generalized to antennas with several passive elements.

*Keywords:* wire antennas, numerical methods.

**Doklady BGUIR. 2018, Vol. 114, No. 4, pp. 71-78**

**Methodology of the numerical electrodynamic analysis of the two-element wire radiator**

**Yu.N. Egorov, V.V. Gladeychuk**

### Введение

Одной из актуальных задач электродинамики является разработка и развитие эффективных методов анализа антенн, обеспечивающих высокую точность решения при низких вычислительных затратах. Так, в частности, для построения математической модели излучателей, состоящих из тонких проволок произвольной конфигурации, успешно применяется метод интегральных уравнений (ИУ) [1].

Существенной особенностью метода ИУ является проблема устойчивости вычислительного алгоритма, для решения которой обычно используется метод саморегуляризации [1–3]. При этом под критерием устойчивости понимается сходимость одной или нескольких величин, описывающих поведение искомого тока в зависимости от длины сегментов разбиения проводников излучающей системы. Выбор оцениваемой величины и критерия её сходимости является важным условием численного моделирования проволочных антенн и во многом определяет его результаты.

В работах [4, 5] авторами предложена методика построения математической модели проволочных антенн на основе ИУ Поклингтона и метода Крылова-Боголюбова с использованием в качестве оцениваемого параметра сходимости числа обусловленности системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). На примере тестовой задачи для линейного симметричного вибратора показано, что сходимость по обусловленности СЛАУ обеспечивает более высокую точность расчета входного сопротивления антенны в сравнении с результатами, полученными по критерию собственной сходимости этого параметра.

Очевидно, что проведенная в [5] верификация результатов решения задачи электродинамического анализа линейного симметричного вибратора является недостаточной для обобщения предложенной методики, в связи с чем практический интерес представляет изучение её применимости к более сложным конструкциям проволочных антенн.

Цель данной работы – численное решение внутренней задачи для двухэлементного проволочного излучателя на основе методики, изложенной в [4, 5], и оценка достоверности полученных результатов.

### Геометрия антенной системы и ее математическая модель

Объект исследования представляет собой систему из двух параллельных прямолинейных проводников длиной  $2l$  и радиусом  $r_0$ , расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга (рис. 1). К одному из них в центре подключен источник возбуждения.

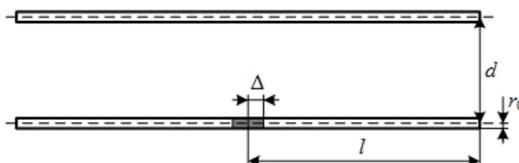


Рис. 1. Двухэлементный проволочный излучатель

Математическая модель исследуемой антенны, как указано во введении, основана на ИУ Поклингтона и методе Крылова-Боголюбова, а методика ее реализации подробно изложена в работах [4–6]. В ходе моделирования учтена зеркальная симметрия излучающей системы [1, 3] относительно ее магнитной плоскости, что позволило вдвое сократить размерность СЛАУ и, соответственно, существенно снизить вычислительные затраты.

Первичное поле в зазоре возбуждения активного проводника задано с помощью модели  $\delta$ -генератора так же, как и в работах [4, 5] при исследовании линейного симметричного вибратора.

### Анализ устойчивости и достоверности решения при различных условиях сегментации

Решение внутренней задачи для исследуемой антенной системы выполнено в частотном диапазоне с десятикратным перекрытием ( $l/\lambda = 0,1 \dots 1$ ) при различных значениях радиуса провода ( $2l/r_0 = 100 \dots 1000$ ). Устойчивость решения проверена оценкой его сходимости по входному сопротивлению ( $Z_{ex} = R_{ex} + iX_{ex}$ ) и числу обусловленности СЛАУ ( $\mu$ ) в зависимости от длины отрезка разбиения  $\Delta L$  (рис. 2), выполняющего роль параметра регуляризации.

Сравнительный анализ зависимостей  $R_{ex}(\Delta L)$ ,  $X_{ex}(\Delta L)$  и  $\mu(\Delta L)$  показывает, что интервалы их сходимости при любых соотношениях  $l/\lambda$  и  $2l/r_0$  являются вполне устойчивыми и не совпадают между собой. Так, число обусловленности СЛАУ сходится на участке  $\Delta L \approx (1 \dots 2)r_0$ . Сходимость же по составляющим входного сопротивления в основном сохраняется в диапазоне  $\Delta L \approx (3 \dots 3,5)r_0$ , в пределах которого значения  $R_{ex}$  и  $X_{ex}$  имеют существенные отличия от тех, что наблюдаются при  $\Delta L \approx (1 \dots 2)r_0$ . Отсюда возникает необходимость верификации результатов.

Проверка достоверности решения выполнена с помощью программы моделирования проволочных антенн MMANA [7]. Вычисленные с её помощью значения составляющих входного сопротивления нанесены на графики  $R_{ex}(\Delta L)$  и  $X_{ex}(\Delta L)$  (рис. 2), где наглядно демонстрируют, что наибольшая точность достигается на интервале сходимости по обусловленности СЛАУ, подтверждая результаты, полученные в работе [4] для линейного симметричного вибратора. В качестве критерия устойчивости решения в [4] предложено использовать находящийся на интервале  $\Delta L \approx (1 \dots 2)r_0$  локальный максимум функции  $\mu(\Delta L)$ . Однако, во-первых, это не гарантирует максимальную точность вычислений, а лишь служит признаком сходимости, по которому следует определять длину сегментов разбиения для расчёта на заданной частоте. Во-вторых, исследование в диапазоне частот показывает, что положение локального максимума  $\mu(\Delta L)$  изменяется в пределах интервала  $\Delta L \approx (1 \dots 2)r_0$  в зависимости от соотношения  $l/\lambda$ , что особенно резко проявляется в области резонанса (рис. 3). Таким образом, одна и та же модель излучателя с сегментами фиксированной длины не может одновременно на нескольких частотах строго удовлетворять указанному критерию. В то же время это не является обязательным, так как не гарантирует максимальную достоверность вычислений. Тогда практический интерес представляет задача определения некоторого оптимального значения или узкого интервала значений  $\Delta L$ , при котором обеспечивается достаточно точное решение на всех частотах рабочего диапазона.

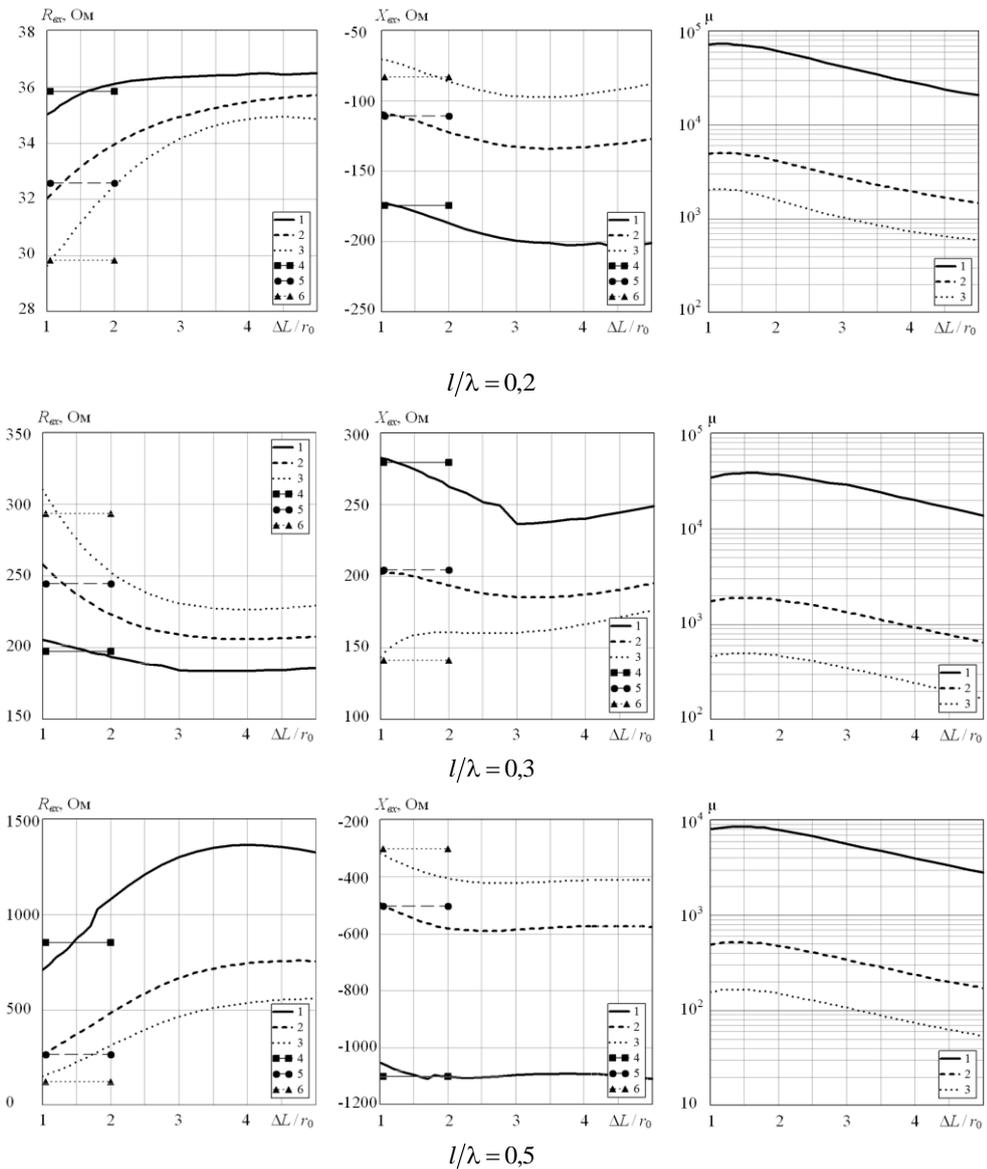


Рис. 2. Графики сходимости параметров модели (1–3) и результаты расчета в программе MMANA (4–6)  
 (1, 4 –  $2l/r_0 = 1000$ ; 2, 5 –  $2l/r_0 = 200$ ; 3, 6 –  $2l/r_0 = 100$ )

В работе [5] на примере линейного симметричного вибратора установлено, что высокая точность решения внутренней задачи может обеспечиваться в широком частотном диапазоне, если оптимальное значение  $\Delta L$  определять по максимуму среднего в этом диапазоне нормированного числа обусловленности СЛАУ:

$$\bar{\mu}(\Delta L) = \frac{1}{n_\lambda} \sum_{l/\lambda} \frac{\mu(\Delta L, l/\lambda)}{\mu_{\max}}, \quad (1)$$

где  $n_\lambda$  – количество отсчетов по  $l/\lambda$ ;  $\mu_{\max}$  – максимальное значение ряда  $\mu(\Delta L)$  при  $l/\lambda = \text{const}$ .

Этот же подход применен и в отношении исследуемой системы из двух вибраторов. На рис. 4 представлены графики зависимости среднего нормированного числа обусловленности СЛАУ от длины сегментов разбиения, рассчитанные с помощью выражения (1) в диапазоне значений  $l/\lambda = 0,1 \dots 1$  по 55 равномерно распределенным отсчетам. Видно, что все кривые  $\bar{\mu}(\Delta L)$  идентичны друг другу и плавно сходятся к экстремумам, сосредоточенным на узком интервале  $\Delta L \approx (1,3 \dots 1,4)r_0$ . Это полностью соответствует результатам, полученным в [5].

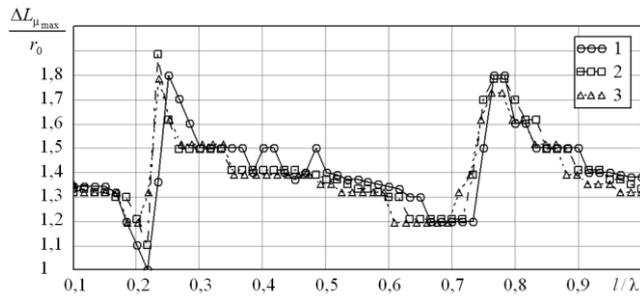


Рис. 3. Частотные зависимости положения локального максимума  $\mu$  на интервале его сходимости ( $1 - 2l/r_0 = 1000$ ;  $2 - 2l/r_0 = 200$ ;  $3 - 2l/r_0 = 100$ )

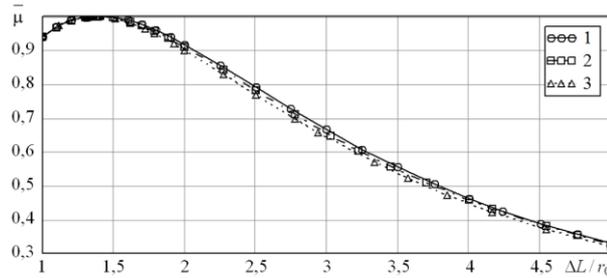


Рис. 4. Графики сходимости усредненных в диапазоне частот нормированных значений  $\mu$  ( $1 - 2l/r_0 = 1000$ ;  $2 - 2l/r_0 = 200$ ;  $3 - 2l/r_0 = 100$ )

Исследования в более широком частотном диапазоне показали, что вид функции  $\bar{\mu}(\Delta L)$  и положение интервала ее сходимости остаются практически неизменными. Это объясняется тем, что распределение максимумов  $\mu(\Delta L)$  на частотной оси (см. рис. 3) имеет периодический характер и примерно повторяется на интервалах частот, разделенных точками последовательного резонанса. Ввиду того, что рассмотренный диапазон значений  $l/\lambda = 0,1 \dots 1$  содержит две такие точки, то установленный в нем усредненный интервал сходимости  $\Delta L \approx (1,3 \dots 1,4)r_0$  остается неизменным и вне этого диапазона с учетом ограничений тонкопроволочного приближения и сегментации модели излучателя [3]. Увеличение количества отсчетов по  $l/\lambda$  тоже не оказывает заметного влияния на результат усреднения, так как изначально построенные по 55 дискретным значениям функции  $\Delta L_{\mu_{\max}}(l/\lambda)$  с достаточной детализацией описывают частотную зависимость распределения максимумов числа  $\mu$  на интервале  $\Delta L \approx (1 \dots 2)r_0$ .

#### Метод сокращения числа сегментов разбиения проволочной антенны, обеспечивающий исходную точность решения

Очевидно, что использование сегментов малой длины  $\Delta L \approx (1,3 \dots 1,4)r_0$  приводит к СЛАУ большой размерности, решение которых требует значительных вычислительных ресурсов. В связи с этим возникает необходимость поиска методов сокращения количества сегментов разбиения при условии сохранения исходной точности. Так, в ходе численных экспериментов установлено, что с увеличением длины сегментов на пассивном проводнике достигается практически полное повторение результатов решения, полученных на усредненном интервале сходимости по обусловленности СЛАУ. При этом сегментация активного вибратора должна сохраняться неизменной.

Количественная оценка соответствия своим исходным значениям параметров модели с увеличенной длиной сегментов на пассивном проводнике выполнена путем вычисления средней в диапазоне частот относительной погрешности решения по числу обусловленности СЛАУ и составляющим входного сопротивления:

$$\overline{\Delta\mu}(\Delta L') = \frac{1}{n_\lambda} \sum_{l/\lambda} \left| 1 - \frac{\mu(\Delta L', l/\lambda)}{\mu(\Delta L_\mu, l/\lambda)} \right| \cdot 100\%, \quad (2)$$

$$\overline{\Delta R}_{ex}(\Delta L') = \frac{1}{n_{\lambda}} \sum_{l/\lambda} \left| 1 - \frac{R_{ex}(\Delta L', l/\lambda)}{R_{ex}(\Delta L_{\mu}, l/\lambda)} \right| \cdot 100\% , \quad (3)$$

$$\overline{\Delta X}_{ex}(\Delta L') = \frac{1}{n_{\lambda}} \sum_{l/\lambda} \left| 1 - \frac{X_{ex}(\Delta L', l/\lambda)}{X_{ex}(\Delta L_{\mu}, l/\lambda)} \right| \cdot 100\% , \quad (4)$$

где  $\Delta L' > \Delta L_{\mu}$  – длина сегментов на пассивном проводнике;  $\Delta L_{\mu} \in [1,3r_0; 1,4r_0]$  – исходная длина всех сегментов, удовлетворяющая средней сходимости по обусловленности СЛАНУ;  $n_{\lambda}$  – количество отсчетов по  $l/\lambda$ .

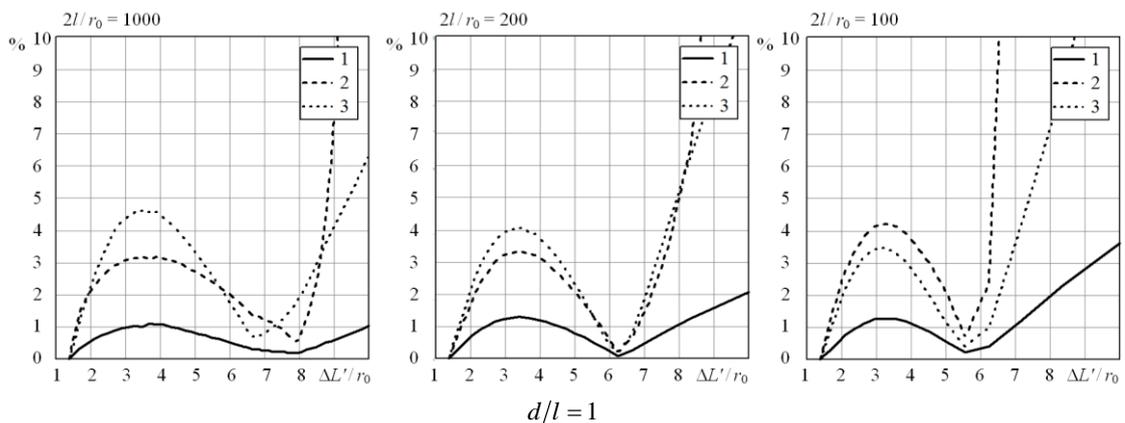
Результаты расчета средних относительных погрешностей (2)–(4), полученные в ранее заявленном диапазоне значений  $l/\lambda = 0,1 \dots 1$  по 55 равномерно распределенным отсчетам при  $\Delta L_{\mu} \approx 1,37r_0$ , представлены в виде графиков на рис. 5. Там же изображены кривые процентного изменения числа сегментов на пассивном проводнике  $n'(\Delta L')$ . Для удобства сравнения кривых изменяемый параметр  $\Delta L'$  выражен в радиусах провода ( $\Delta L'/r_0$ ).

Анализ графиков показывает, что с увеличением  $\Delta L'$  все оцениваемые параметры ( $R_{ex}$ ,  $X_{ex}$ ,  $\mu$ ) сначала расходятся, а затем синхронно возвращаются к исходным значениям с высокой степенью соответствия. Длина сегментов пассивного проводника, при которой наблюдается данный эффект, очевидно, является оптимальной, а ее значение  $\Delta L'_{opt}$  зависит от отношения  $2l/r_0$  (чем тоньше проводник, тем больше  $\Delta L'_{opt}$ ). При этом сокращение числа сегментов на пассивном проводнике в рассмотренных примерах достигает примерно 75–80 % от их начального количества. С дальнейшим увеличением  $\Delta L'$  (свыше  $\Delta L'_{opt}$ ) средние погрешности указанных параметров снова возрастают.

Степень расходимости результатов решения при изменении  $\Delta L'$  зависит не только от толщины вибраторов, но и от расстояния  $d$  между ними. Так, при сокращении расстояния средние относительные погрешности (2)–(4) в целом возрастают (рис. 5), но их значение в точке  $\Delta L' = \Delta L'_{opt}$  остается достаточно низким, составляя единицы процентов и менее.

Также установлено, что величина  $\Delta L'_{opt}$  не зависит от расстояния между проводниками и в контексте геометрии рассматриваемой антенны определяется только отношением  $2l/r_0$  в пассивном излучателе (рис. 5). Это обстоятельство делает целесообразным определение функциональной зависимости между этими параметрами, что позволит выполнять оптимальную сегментацию модели, исключив процедуру поиска минимальных погрешностей.

Вторым фактором, оказывающим влияние на значение оптимальной длины сегментов, является учет симметрии электродинамической системы. В подтверждение этому на рис. 6 с помощью дискретных отсчетов, обозначенных маркерами, приведены зависимости  $\Delta L'_{opt}(2l/r_0)$ , одна из которых рассчитана с учетом зеркальной симметрии (ЗС) [1, 3] относительно магнитной плоскости исследуемой антенны, а вторая – без него (БС). В обоих случаях с увеличением отношения  $2l/r_0$  сначала наблюдается плавный рост  $\Delta L'_{opt}$ , а затем его скачкообразное понижение. Описанная закономерность далее повторяется, но величина  $\Delta L'_{opt}$  при этом изменяется в гораздо меньших пределах.



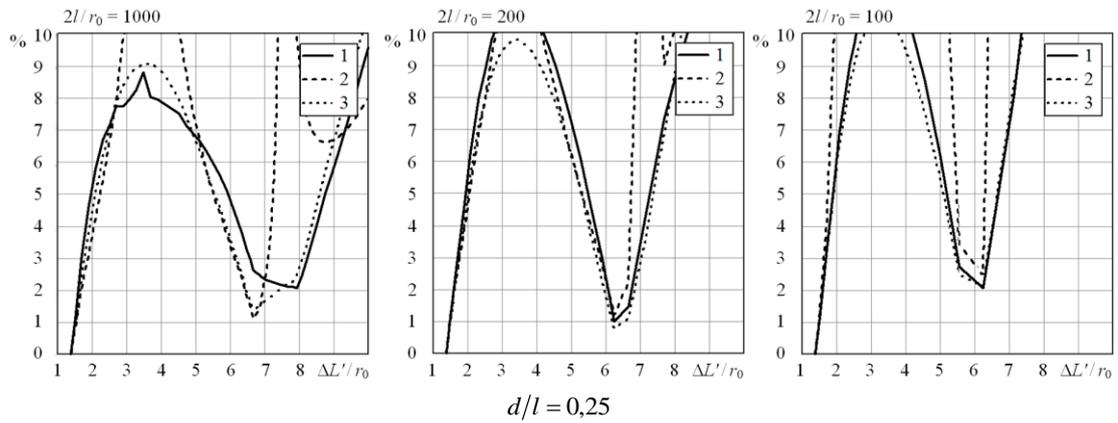


Рис. 5. Средние относительные погрешности параметров (1 –  $\overline{\Delta R_{ex}}$ ; 2 –  $\overline{\Delta X_{ex}}$ ; 3 –  $\overline{\Delta \mu}$ )

Очевидно, что основной интерес для аналитического описания представляет начальный интервал плавного изменения значений  $\Delta L'_{opt}(2l/r_0)$ , на котором отношение  $2l/r_0$  в наибольшей степени отвечает геометрии практических конструкций проволочных антенн [8].

$$\Delta L'_{opt} \left( \frac{2l}{r_0} \right) = \sum_{i=0}^8 C_i \cdot \left( \frac{2l}{r_0} \cdot 10^{-3} \right)^i. \quad (5)$$

Коэффициенты  $C_i$  в (5) для случая учета ЗС и БС приведены в табл. 1, а соответствующие им интервалы построения регрессии составляют:  $2l/r_0 \in [50; 2470]$  (ЗС),  $2l/r_0 \in [350; 2220]$  (БС) (рис. 5).

Таблица 1. Полиномиальные коэффициенты  $C_i$

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ЗС	5,35	3,935	0,314	-2,005	-3,726	8,12505	-5,54974	1,67073	-0,1895
БС	9,019	-31,318	132,793	-270,919	315,682	-220,394	91,169	-20,5926	1,95574

Очевидно, что учет зеркальной симметрии антенной системы является более предпочтительным как по объему вычислений, так и по диапазону толщины проводников, для которых получено аналитическое описание оптимальной длины сегментов.

С целью верификации разработанной математической модели выполнено решение тестовой задачи для двухэлементного направленного излучателя 30-метрового диапазона [8]. Согласно исходным данным антенна имеет следующие параметры: резонансная частота – 10,12 МГц; длина излучателя – 14,43 м; длина директора – 13,7 м; расстояние между вибраторами – 4,45 м; диаметр проводников – 2,54 см; сопротивление излучения – около 28 Ом.

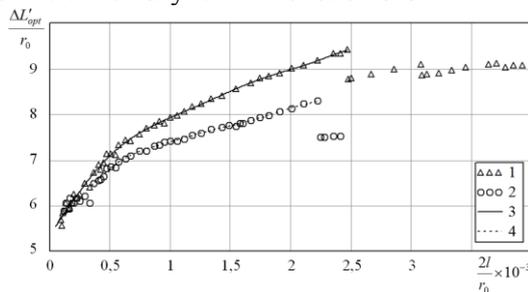


Рис. 6. Оптимальная длина сегментов на пассивном проводнике (1 – дискретные отсчеты ЗС; 2 – дискретные отсчеты БС; 3 – регрессия ЗС; 4 – регрессия БС)

Моделирование выполнено с использованием сегментации на интервалах сходимости по входному сопротивлению, числу обусловленности СЛАУ с полным и сокращенным числом сегментов на пассивном проводнике, а также в программе ММАНА. Результаты расчетов (рис. 7) свидетельствуют о высокой достоверности модели, использующей критерий сходимости по обусловленности СЛАУ. При этом точность решения по  $R_{ex}$  выше в 4,7 раза, а по частоте резонанса – в 5,3 раза, что соответствует данным идентичной оценки, выполненной в [5] для линейного симметричного вибратора.

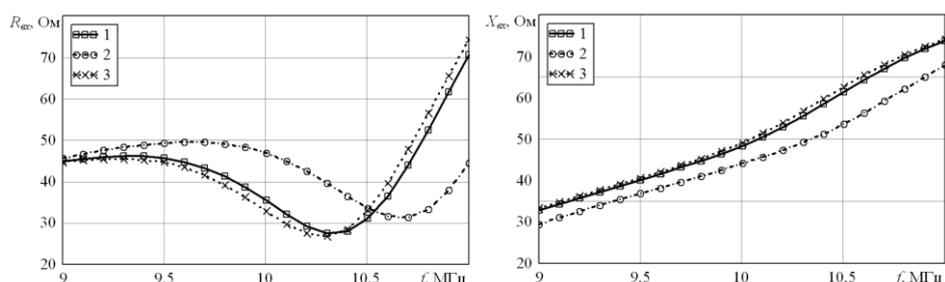


Рис. 7. Частотные характеристики входного сопротивления двухэлементного направленного излучателя (1 –  $\Delta L = \Delta L' = 1,38r_0$ ; 2 –  $\Delta L = \Delta L' = 3,5r_0$ ; 3 – ММАНА)

Общее число сегментов модели, учитывающей зеркальную симметрию антенны, составило: 316 при  $\Delta L = \Delta L' = 3,5r_0$ ; 803 при  $\Delta L = \Delta L' = 1,38r_0$  и 480 при  $\Delta L = 1,38r_0$ ,  $\Delta L'_{opt} = 7,9r_0$ . Применение в последнем случае сегментов увеличенной (оптимальной) длины на пассивном проводнике позволило сократить их количество на 83 % и при этом полностью повторить результаты решения, полученные в диапазоне частот при  $\Delta L = \Delta L' = 1,38r_0$ .

### Заключение

Представленные результаты показывают, что описанная в работах [4, 5] методика решения задачи электродинамического анализа проволочных антенн эффективна применительно к двухэлементному проволочному излучателю. Это подтверждается следующими установленными фактами:

1. Предложенный в [5] критерий сходимости по обусловленности СЛАУ обеспечивает более высокую точность моделирования в сравнении с результатами, полученными по критерию сходимости входного сопротивления антенны.

2. Усредненный интервал сходимости  $\Delta L \approx (1,3 \dots 1,4)r_0$  не зависит от геометрии антенной системы и рабочей частоты. Это позволяет исключить из алгоритма решения процедуру анализа его устойчивости и применять одну и ту же сегментную модель для расчетов в произвольном частотном диапазоне с учетом ограничений тонкопроволочного приближения.

3. Недостаток методики, связанный с большой размерностью СЛАУ, частично устраняется за счет оптимизации сегментов на пассивном проводнике. Значение их длины можно определить аналитически. Проверка решения на сходимость при этом не требуется.

В ходе численных экспериментов также установлено, что с увеличением в конструкции антенны числа пассивных проводников все полученные результаты и закономерности сохраняют свою актуальность, а сокращение размерности СЛАУ за счет оптимизации сегментов становится более существенным.

### Список литературы

1. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977. 485 с.
2. Демидчик В.И., Калашников Н.В., Рунов А.В. Алгоритм расчета токораспределения электрически длинных криволинейных проводников // Известия ВУЗов. Радиоэлектроника. 1983. Т. 26, № 3. С. 82–84.
3. Бузова М.А., Юдин В.В. Проектирование проволочных антенн на основе интегральных уравнений. М.: Радио и связь, 2005. 172 с.
4. Егоров Ю. Н., Гладейчук В. В. Оценка устойчивости численного решения ИУ Поклингтона методом Крылова-Боголюбова // Вестн. Воен. акад. Респ. Беларусь. 2016. № 2 (51). С. 55–61.
5. Егоров Ю. Н., Гладейчук В. В. Методика численного решения задачи токораспределения для проволочных антенн методом интегральных уравнений // Доклады БГУИР. 2017. № 4 (106). С. 56–61.
6. Егоров Ю. Н., Гладейчук В. В. Математическая модель проволочных фрактальных антенн произвольной геометрии // Электроника инфо. 2015. № 6 (120). С. 51–55.
7. Гончаренко И.В. Компьютерное моделирование антенн. Все о программе ММАНА. М.: ИП РадиоСофт; журнал «Радио», 2002. 80 с.
8. Ротхаммель К., Кришке А. Антенны. Том 1. (11-е изд.). М.: Данвел, 2007. 416 с.

### References

1. Vychislitel'nyye metody v elektrodinamike / Pod red. R. Mitry. M.: Mir, 1977. 485 s. (in Russ.)

2. Demidchik V.I., Kalashnikov N.V., Runov A.V. Algoritm rascheta tokoraspredeleniya elektricheski dlinnykh krivolineynykh provodnikov // Izvestiya VUZov. Radioelektronika. 1983. T. 26, № 3. S. 82–84. (in Russ.)
3. Buzova M.A., Yudin V.V. Proyektirovaniye provolochnykh antenn na osnove integral'nykh uravneniy. M.: Radio i svyaz', 2005. 172 s. (in Russ.)
4. Egorov Yu.N., Gladeychuk V.V. Otsenka ustoychivosti chislennogo resheniya IU Poklingtona metodom Krylova-Bogolyubova // Vestn. Voen. akad. Resp. Belarus'. 2016. № 2 (51). S. 55–61. (in Russ.)
5. Egorov Yu. N., Gladeychuk V. V. Metodika chislennogo reshenija zadachi tokoraspredelenija dlja provolochnykh antenn metodom integral'nykh uravnenij // Doklady BGUIR. 2017. № 4 (106). S. 56–61. (in Russ.)
6. Egorov Yu.N., Gladeychuk V.V. Matematicheskaya model' provolochnykh fraktal'nykh antenn proizvol'noy geometrii // Elektronika info. 2015. № 6 (120). S. 51–55. (in Russ.)
7. Goncharenko I.V. Komp'yuternoe modelirovanie antenn. Vse o programme MMANA. M. : IP RadioSoft; zhurnal «Radio», 2002. 80 s. (in Russ.)
8. Rothammel' K., Krishke A. Antenny. Tom 1. (11-e izd.). M. : Danvel, 2007. 416 s. (in Russ.)

#### **Сведения об авторах**

Егоров Ю.Н., начальник цикла кафедры радиотехники Военной академии Республики Беларусь.

Гладейчук В.В., к.т.н., доцент, заместитель начальника кафедры радиотехники Военной академии Республики Беларусь.

#### **Адрес для корреспонденции**

220057, Республика Беларусь,  
г. Минск, пр. Независимости, 220,  
Военная академия Республики Беларусь  
тел. +375-29-778-19-05;  
e-mail: egorov\_yury@mail.ru  
Егоров Юрий Николаевич

#### **Information about the authors**

Egorov Yu.N., head of cycle of department of radio engineering of Military academy of the Republic of Belarus.

Gladeychuk V.V., Ph.D, associate professor, deputy head of department of radio engineering of Military academy of the Republic of Belarus.

#### **Address for correspondence**

220057, Republic of Belarus,  
Minsk, Nezavisimosti ave., 220,  
Military academy of the Republic of Belarus  
tel. +375-29-778-19-05;  
e-mail: egorov\_yury@mail.ru  
Egorov Yury Nikolaevich