

# ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК В ЗАДАЧАХ ДВУХУРОВНЕВОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Д.Е. БЕРЕЖНОВ, Л.И. МИНЧЕНКО

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Республика Беларусь*

*Поступила в редакцию 23 июня 2017*

**Аннотация.** Двухуровневые задачи являются весьма сложным объектом для численного анализа. Несмотря на то, что их изучению посвящена обширная литература, не существует универсальных методов их решения и многочисленные публикации сводятся в основном к выделению отдельных классов доступных для анализа задач. В данной статье рассматриваются линейные задачи двухуровневого программирования, для которых строится алгоритм вычисления стационарных точек.

*Ключевые слова:* оптимизация, нелинейное программирование, условия регулярности.

**Abstract.** Bilevel programming problems are considerably difficult for numerical analysis. Despite the vast amount of literature and research dedicated to studying them, there are no universal methods to solve them and numerous publications are concerned mainly with identifying particular subsets of problems that can be efficiently analyzed. Linear bilevel programming problems are considered, and an algorithm for computing their stationary points is developed in this paper.

*Keywords:* optimization, non-linear programming, regularity conditions.

**Doklady BGUIR. 2017, Vol. 108, No. 6, pp. 55-62**

**Calculation of stationary points in linear bilevel programming problems**

**D.E. Berezhnov, L.I. Minchenko**

## Введение

Задачи двухуровневого программирования (bilevel programming) [1, 2] являются инструментом моделирования сложных иерархических систем в промышленности, технике и экономике. В такого рода задачах верхний уровень иерархической системы принимает решение первым. На основе этого решения нижний уровень принимает в ответ свое решение. Задача заключается в том, чтобы найти такое решение, которое приводит систему к достижению некоторой глобальной цели.

Пусть  $x \in R^n$ ,  $y \in R^m$ . Рассмотрим двухуровневую задачу, то есть задачу математического программирования (она называется задачей верхнего уровня)

$$F(x, y) \rightarrow \min, \quad (1)$$

в качестве ограничений которой наряду со стандартными ограничениями

$$x \in X = \{x \in R^n \mid g_j(x) \leq 0, j \in J = \{1, \dots, p\}\} \quad (2)$$

выступают и ограничения, определяемые множеством решений задачи нижнего уровня:

$$y \in S(x) = \overset{\Delta}{\text{Arg min}} \{f(x, y) \mid y \in K(x)\}, \quad (3)$$

где  $K(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x, y) \leq 0, i \in I = \{1, \dots, s\}\}$ , функции  $F(x, y)$ ,  $f(x, y)$ ,  $g_j(x)$  и  $h_i(x, y)$  непрерывно дифференцируемы.

Задачу (1)–(3) будем коротко обозначать (ВРР). Точка  $(x, y)$  называется допустимой в двухуровневой задаче (ВРР), если она удовлетворяет ограничениям  $g_j(x) \leq 0, j \in J$  и  $y \in S(x)$ . Допустимая точка  $(x^0, y^0)$  называется оптимальным решением (локальным оптимальным решением) двухуровневой задачи, если  $F(x^0, y^0) \leq F(x, y)$  для всех допустимых точек  $(x, y)$  (из окрестности  $(x^0, y^0)$ ).

Для ограничений задачи введем множество индексов  $I(x, y) = \{i \in I \mid h_i(x, y) = 0\}$  и  $J(x) = \{j \in J \mid g_j(x) = 0\}$ , активных в точке  $(x, y)$  ограничений.

Несмотря на внешнюю простоту постановки, решение двухуровневых задач является достаточно трудной проблемой (см. [2]). Основные результаты получены только при дополнительных требованиях к функциям  $f(x, y)$  и  $h_i(x, y) \leq 0, i \in I$ .

В статье применяется подход к решению задачи (BPP) [3], основанный на использовании функции оптимального значения задачи нижнего уровня. Введем функцию оптимального значения задачи нижнего уровня  $\varphi(x) = \min\{f(x, y) \mid y \in K(x)\}$ .

Тогда задачу (BPP) можно записать в виде равносильной одноуровневой задачи:

$$F(x, y) \rightarrow \min_{x, y}, g_j(x) \leq 0, j \in J, y \in S(x) = \{y \in K(x) \mid f(x, y) \leq \varphi(x)\}. \quad (4)$$

Определенную проблему в данном подходе создает негладкость функции оптимального значения  $\varphi$  в ограничениях задачи. В [3] предложен метод, позволяющий при определенных условиях перенести негладкое ограничение в целевую функцию задачи верхнего уровня (см. также [4, 5]). Следуя [3], задачу (4) называют частично устойчивой (partial calm) в оптимальной точке  $(x^0, y^0)$ , если найдется число  $\mu > 0$  такое, что точка  $(x^0, y^0)$  является локальным оптимальным решением задачи

$$F(x, y) + \mu(f(x, y) - \varphi(x)) \rightarrow \min, x \in X, y \in K(x). \quad (5)$$

В [3] доказана частичная устойчивость задачи (4) при условии линейности целевой функции и ограничений задачи нижнего уровня по переменным  $x, y$ .

В данной работе в отличие от [3] предлагается развитие подхода, использующего глобальную версию частичной устойчивости, что позволяет строить прямые методы поиска глобального решения задачи (4).

### Основные определения

Пусть  $A$  – непустое выпуклое множество в  $R^m$ . Обозначим через  $N_A(y)$  нормальный конус [6] к множеству  $A$  в точке  $y \in A$ , то есть  $N_A(y) = [\text{clcon}(A - y)]^*$ .

Через  $d(y, A)$  будем обозначать евклидово расстояние от точки  $y \in R^m$  до множества  $A \subset R^m$ , через  $|y|$  евклидову норму вектора  $y \in R^m$ .

Рассмотрим многозначное отображение  $G$ , которое ставит в соответствие каждой точке  $x \in R^n$  множество  $G(x) \subset R^m$ . Под графиком и областью определения многозначного отображения  $G$  понимают соответственно множества  $\text{gr}G = \{(x, y) \in R^n \times R^m \mid y \in G(x), x \in R^n\}$  и  $\text{dom}G = \{x \in R^n \mid G(x) \neq \emptyset\}$ .

Многозначное отображение  $G$  называется выпуклым, если множество  $\text{gr}G$  выпукло.

Многозначное отображение  $G$  называется замкнутым, если множество  $\text{gr}G$  замкнуто.

Замкнутость отображения  $G$  в точке  $x^0$  равносильна требованию, чтобы для любых последовательностей  $x^k \rightarrow x^0, y^k \rightarrow y$  таких, что  $y^k \in G(x^k)$ , выполнялось  $y \in G(x^0)$ .

Многозначное отображение  $G$  часто задается с помощью функциональных неравенств, когда в соответствие каждому вектору  $x \in R^n$  ставится непустое множество

$$G(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x, y) \leq 0, i = 1, \dots, s\}, \quad (6)$$

где функции  $h_i(x, y), i = 1, \dots, s$  непрерывны.

Следуя [7], многозначное отображение  $G$ , заданное условием (6), будем называть  $R$ -регулярным относительно  $\text{dom}G$  в точке  $(x^0, y^0)$ , где  $y^0 \in G(x^0)$ , если существует число  $\alpha > 0$  такое, что  $d(y, G(x)) \leq \alpha \max\{0, h_i(x, y), i = 1, \dots, s\}$  для всех  $x$  и  $y$  из некоторых окрестностей  $V(x^0)$  и  $V(y^0)$  точек  $x^0$  и  $y^0$  таких, что  $x \in \text{dom}G$ . Многозначное отображение  $G$  будем называть глобально  $R$ -регулярным относительно  $\text{dom}G$ , если существует число  $\alpha > 0$  такое, что  $d(y, G(x)) \leq \alpha \max\{0, h_i(x, y), i = 1, \dots, s\}$  для всех  $(x, y)$  таких, что  $x \in \text{dom}G$ .

### Обобщение леммы Хоффмана и вспомогательные результаты

Пусть многозначное отображение  $G$  определяется условием

$$G(x) = \{y \in R^m \mid \langle \xi^i, y \rangle + \alpha_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, s\}, \quad (7)$$

где  $\xi^i \in R^m$ ,  $\alpha_i(x)$  – непрерывные функции при  $i = 1, \dots, s$ .

Следующая лемма обобщает известную лемму Хоффмана [8]. Ее доказательство в основном следует схеме, предложенной в монографии [9].

**Лемма 3.1.** Для многозначного отображения  $G$ , определяемого условием (7), существует число  $M = \text{const} > 0$  такое, что для любого вектора  $v \in R^m$  и любого  $x \in \text{dom}G$  справедливо неравенство  $d(v, G(x)) \leq M \max\{0, \langle \xi^i, v \rangle + \alpha_i(x) \mid i = 1, \dots, s\}$ .

*Доказательство.* Пусть выполнены условия леммы. Положим  $h_i(x, y) = \langle \xi^i, y \rangle + \alpha_i(x)$ ,  $h(x, y) = \max\{h_i(x, y) \mid i = 1, \dots, s\}$ . Тогда  $G(x) = \{y \in R^m \mid h(x, y) \leq 0\}$ . Возьмем любую точку  $x \in \text{dom}G$  и любую граничную точку  $y$  множества  $G(x)$ . Поскольку множество  $G(x)$  выпукло, множество точек  $v \in R^m$  таких, что  $d(v, G(x)) = |v - y|$ , совпадает с множеством  $\{v = y(t) \mid y(t) = y + tl, l \in N_{G(x)}(y), |l| = 1\}$ , причем  $t = d(y(t), G(x))$ .

Пусть  $I = \{1, \dots, s\}$ ,  $I(x, y) = \{i \in I \mid h_i(x, y) = 0\}$ . Тогда  $N_{G(x)}(y) = \left\{ \sum_{i \in I(x, y)} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \geq 0, i \in I \right\}$  (см.

[6]) и, положив  $N(x, y) = \{l \in R^m \mid l \in N_{G(x)}(y), |l| = 1\}$ , получим

$$\begin{aligned} h(x, y + tl) &\geq \max_{i \in I(x, y)} h_i(x, y + tl) = \max_{i \in I(x, y)} \{\langle \xi^i, y \rangle + t \langle \xi^i, l \rangle + \alpha_i(x)\} = \\ &= t \max_{i \in I(x, y)} \langle \xi^i, l \rangle \geq t \min_{l \in N(x, y)} \max_{i \in I(x, y)} \langle \xi^i, l \rangle = t \delta(x, y). \end{aligned}$$

Предположим, что  $\delta(x, y) \leq 0$ . Так как  $\max_{i \in I(x, y)} \langle \xi^i, l \rangle$  – непрерывная функция от  $l$ , то найдется вектор  $l^0 \in N(x, y)$  такой, что  $\delta(x, y) = \max_{i \in I(x, y)} \langle \xi^i, l^0 \rangle \leq 0$ .

Так как  $h_i(x, y) < 0$  при  $i \notin I(x, y)$ , то вследствие непрерывности функций  $h_i(x, y)$  по  $y$  существует число  $t_0 > 0$  такое, что  $h_i(x, y + tl^0) = \langle a_i, y \rangle + b_i(x) + t \langle a_i, l^0 \rangle < 0$  при  $i \notin I(x, y)$  для всех положительных  $t \leq t_0$ . Следовательно, поскольку  $y + tl^0 \notin G(x)$  для всех  $t > 0$ , то при всех положительных  $t \leq t_0$  справедливо  $h_i(x, y + tl^0) = \langle \xi^i, y \rangle + \alpha_i(x) + t \langle \xi^i, l^0 \rangle < 0$  для всех  $i \notin I(x, y)$ . Следовательно, при всех положительных  $t \leq t_0$

$$0 < h(x, y + tl^0) = \max_{i \in I(x, y)} h_i(x, y + tl^0) = \max_{i \in I(x, y)} \{\langle \xi^i, y \rangle + t \langle \xi^i, l^0 \rangle + \alpha_i(x)\} = t \max_{i \in I(x, y)} \langle \xi^i, l^0 \rangle = t \delta(x, y) \leq 0.$$

Полученное противоречие говорит о том, что  $\delta(x, y) > 0$ .

Положим  $\tilde{\Lambda}(x, y) = \{\lambda \in R^r \mid \lambda_j \geq 0, j \in I(x, y), \lambda_j = 0, j \notin I(x, y), \left| \sum_{j \in I(x, y)} \lambda_j \xi_j^j \right| = 1\}$ . Тогда

$$\delta(x, y) = \min_{l \in N(x, y)} \max_{i \in I(x, y)} \langle \xi^i, l \rangle = \min_{\lambda \in \tilde{\Lambda}(x, y)} \max_{i \in I(x, y)} \langle \xi^i, \sum_{j \in I(x, y)} \lambda_j \xi_j^j \rangle.$$

Поскольку  $\delta(x, y)$  определяется множеством  $I(x, y)$  и существует лишь конечное число подмножеств из  $I = \{1, \dots, s\}$ , то  $\delta(x, y) \geq \delta > 0$ , когда  $y$  пробегает все граничные точки множества  $G(x)$ , а  $x$  пробегает все точки  $\text{dom}G$ . Поскольку любая точка  $v \notin G(x)$  представима в виде  $v = y + tl$ , где  $l \in N_{G(x)}(y)$ ,  $|l| = 1$ ,  $t > 0$ ,  $y$  – граничная точка  $G(x)$ , то для любого  $v \notin G(x)$  справедливо  $h(x, v) \geq \delta t \geq \delta d(v, G(x))$ , откуда следует утверждение леммы.

**Следствие 3.1.** Построенное выше многозначное отображение  $G$ , заданное условием (7), является глобально  $R$ -регулярным относительно  $\text{dom}G$ .

Рассмотрим задачу (P):  $F(x, y) \rightarrow \min$  при ограничениях  $h_0(x, y) \leq 0$ ,  $h_i(x, y) \leq 0$ , где  $i \in I = \{1, \dots, s\}$ ,  $x \in R^n$ ,  $y \in R^m$ , функции  $F$ ,  $h_0$ ,  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, s$  непрерывны.

В данном разделе будем обозначать через  $G$  и  $S$  многозначные отображения, ставящие в соответствие точке  $x \in R^n$  непустые множества  $G(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x, y) \leq 0, i \in I\}$ ,  $S(x) = \{y \in R^m \mid h_0(x, y) \leq 0, h_i(x, y) \leq 0, i \in I\}$ .

**Лемма 3.2.** Пусть точка  $z^0 = (x^0, y^0) \in \text{gr}S$  является решением задачи (P), функция  $F$  липшицева на всем пространстве  $R^n \times R^m$  с постоянной Липшица  $l_0$ ,  $\text{dom}S = \text{dom}G$  и многозначное отображение  $S$  является глобально  $R$ -регулярным относительно  $\text{dom}S$  в  $z^0 = (x^0, y^0) \in \text{gr}S$ . Тогда найдется число  $M_0 > 0$  такое, что при любом  $M \geq M_0$  данная точка будет глобальным решением задачи  $F(x, y) + M \max\{0, h_0(x, y)\} \rightarrow \min$ ,  $h_i(x, y) \leq 0$   $i \in I$ .

*Доказательство.* В силу предложения 2.4.3 [10] точка  $z^0$  является при  $\beta > l_0$  решением задачи  $F(z) + \beta d(z, \text{gr}S) \rightarrow \min$  на всем пространстве  $R^n \times R^m$ . Поскольку  $d(z, \text{gr}S) \leq d(y, S(x))$  для всех  $z = (x, y)$  таких, что  $x \in \text{dom}S$ , то в силу глобальной  $R$ -регулярности многозначного отображения  $S$  относительно  $\text{dom}S$  найдется число  $\alpha > 0$  такое, что  $d(z, \text{gr}S) \leq \alpha \max\{0, h_0(x, y), h_i(x, y), i \in I\}$  для всех  $z = (x, y)$  таких, что  $x \in \text{dom}S$ . В таком случае

$$F(z^0) + M \max\{0, h_0(z^0), h_i(z^0) \mid i \in I\} = F(z^0) + \beta d(z^0, \text{gr}S) \leq F(z) + \beta d(z, \text{gr}S) \leq F(z) + M \max\{0, h_0(z), h_i(z), i \in I\},$$

где  $M = \alpha\beta$  для всех  $z = (x, y)$  таких, что  $x \in \text{dom}S$ .

Тогда для всех  $z = (x, y)$  из достаточно малой окрестности  $V(z^0)$  точки  $z^0$  таких, что  $h_i(z) \leq 0$  при всех  $i \in I$ , получим  $F(z^0) + M \max\{0, h_0(z^0)\} \leq F(z) + M \max\{0, h_0(z)\}$ , то есть точка  $z^0$  является локальным решением задачи  $F(z) + M \max\{0, h_0(z)\} \rightarrow \min$  при ограничениях  $h_i(z) \leq 0, i \in I$ .

### Линейные двухуровневые задачи

Рассмотрим двухуровневую задачу (BPP):

$$F(x, y) \rightarrow \min,$$

$$x \in X = \{x \in R^n \mid g_j(x) \leq 0, j \in J\}, y \in S(x) \stackrel{\Delta}{=} \text{Arg min}\{f(x, y) \mid y \in K(x)\},$$

$$\text{где } y \in R^m, K(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x, y) \leq 0, i \in I\}.$$

Будем считать в дальнейшем, что везде в данном разделе выполнены следующие предположения.

(H1) При любом значении  $x \in \text{dom}K$  задача нижнего уровня имеет решение, то есть  $S(x) \neq \emptyset$  и  $\text{dom}S = \text{dom}K$  (это естественное предположение, означающее, что система нижнего уровня может дать ответ на любую стратегию системы верхнего уровня).

(H2) Мнозначное отображение  $S$  является ограниченным (в смысле Пшеничного [11]), то есть существует постоянная  $M > 0$  такая, что для любого  $y \in S(x)$  справедливо  $|y| \leq M(1 + |x|)$ .

Отметим, что в случае выпуклого и замкнутого многозначного отображения  $S$  условие (H2) выполняется (см. [11]), если множество  $S(x)$  ограничено хотя бы в одной точке  $x \in \text{dom}S$ .

**Лемма 4.1.** Пусть функция  $f(x, y)$  липшицева по  $y$  на  $R^m$  с постоянной Липшица  $l > 0$  при всех  $x \in \text{dom}K$ . Тогда при любом  $\alpha > l$  справедливо  $\varphi(x) = \inf\{f(x, y) + \alpha d(y, K(x)) \mid y \in R^m\}, x \in \text{dom}K$ .

*Доказательство.* Пусть  $x \in \text{dom}K$ . Возьмем любое число  $\varepsilon > 0$  и положим  $\varphi_\varepsilon(x) = \inf\{f(x, y) \mid d(y, K(x)) \leq \varepsilon\}$ . Пусть  $y \in K(x) + \varepsilon B, \tilde{y}(x)$  – ближайшая к  $y$  точка из  $K(x)$ . Тогда  $f(x, y) \geq f(x, \tilde{y}(x)) - l|y - \tilde{y}(x)| \geq \varphi(x) - l\varepsilon > \varphi(x) - \alpha\varepsilon$ , откуда  $\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x) > -\alpha\varepsilon$ . Отсюда следует, что для любого  $y(x) \in S(x)$  справедливо

$$\begin{aligned} f(x, y) + \alpha d(y(x), K(x)) &= f(x, y(x)) = \varphi(x) \leq \inf_{\varepsilon} \{\varphi_\varepsilon(x) + \alpha\varepsilon\} = \inf_{\varepsilon, y} \{f(x, y) + \alpha\varepsilon \mid d(y, K(x)) \leq \varepsilon\} = \\ &= \inf_y \{f(x, y) + \alpha d(y, K(x))\} \leq f(x, y(x)) + \alpha d(y(x), K(x)) = \varphi(x). \end{aligned}$$

Следовательно,  $\inf_y \{f(x, y) + \alpha d(y, K(x))\} = \varphi(x)$ .

**Лемма 4.2.** Пусть многозначное отображение  $K$  в любой точке  $x \in \text{dom}K$  является  $R$ -регулярным относительно  $\text{dom}K$ . Тогда функция  $\varphi$  непрерывна на  $\text{dom}K$ .

*Доказательство.* Действительно, пусть  $x^0 \in \text{dom}\varphi$  и  $\liminf_{x \rightarrow x^0, x \in \text{dom}\varphi} \varphi(x)$  достигается на последовательности  $x^k \rightarrow x^0$ . Пусть  $y^k \in S(x^k)$ . Тогда последовательность  $\{y^k\}$  ограничена, и из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность (обозначим для простоты ее и соответствующую подпоследовательность из  $\{x^k\}$  также  $\{y^k\}, \{x^k\}$ ). Перейдем к пределу в равенстве  $f(x^k, y^k) = \varphi(x^k)$ . Получим  $\liminf_{x \rightarrow x^0, x \in \text{dom}\varphi} \varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^k) = f(x^0, y^0) \geq \varphi(x^0)$ , что означает полунепрерывность снизу  $\varphi$  в точке  $x^0$ .

С другой стороны, пусть  $x^0 \in \text{dom}K, y^0 \in S(x^0)$ . Тогда, используя Лемму 4.1 и  $R$ -регулярность отображения  $K$ , получим  $\varphi(x) \leq f(x, y^0) + \alpha d(y^0, K(x)) \leq f(x, y^0) + M \max\{0, h_i(x, y^0) \mid i \in I\}$ , откуда  $\limsup_{x \rightarrow x^0, x \in \text{dom}K} \varphi(x) \leq f(x^0, y^0) = \varphi(x^0)$ , то есть  $\varphi$  полунепрерывна сверху в  $x^0$  относительно  $\text{dom}K$ .

В дальнейшем в данном разделе будем считать, что

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \langle c, x \rangle + \langle q, y \rangle, f(x, y) = \langle v, x \rangle + \langle p, y \rangle, \\ g_j(x) &= \langle A^j, x \rangle - D_j, h_i(x, y) = \langle a^i, x \rangle + \langle b^i, y \rangle - d_i, J = \{1, \dots, l\}, I = \{1, \dots, s\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $A^j, a^i, b^i, c, q, v, p$  – векторы соответствующей размерности;  $d_i, D_j$  – числа.

Задачу (BPP) с дополнительным условием (8) будем обозначать (BLPP).

Таким образом, в задаче (BLPP) задача нижнего уровня представляет собой задачу линейного программирования

$$\langle v, x \rangle + \langle p, y \rangle \rightarrow \min_y, y \in K(x) \stackrel{\Delta}{=} \{y \in R^m \mid \langle a^i, x \rangle + \langle b^i, y \rangle \leq d_i, i \in I\}. \quad (9)$$

С учетом предположения (Н1) следует, что в задаче (9)  $\text{dom}\varphi = \text{dom}K$ , функция  $\varphi(x)$  выпукла (см., например, теорему 3.2.5 [11]), и при всех  $x \in \text{dom}K$  ее субдифференциал  $\partial\varphi(x)$  имеет вид  $\partial\varphi(x) = \{v + \sum_{i \in I(x,y)} \lambda_i a^i \mid \lambda \in \Lambda(x,y)\}$ , где  $y$  – любой вектор из  $S(x)$ ,

$$\Lambda(x,y) = \{\lambda \in R^s \mid \nabla_y f(x,y) + \sum_{i=1}^s \lambda_i \nabla_y h_i(x,y) = 0, \lambda_i \geq 0 \text{ и } \lambda_i h_i(x,y) = 0 \text{ при } i \in I\} \quad - \text{ множество}$$

множителей Лагранжа в точке  $(x,y)$ . Отметим, что в случае задачи (BLPP) множество  $\Lambda(x,y) \neq \emptyset$  в любой точке  $y \in S(x)$ , более того,  $\Lambda(x,y)$  одно и то же для всех  $y \in S(x)$ , то есть,  $\Lambda(x,y) = \Lambda(x)$  при  $y \in S(x)$ . Отсюда непосредственно следует, что  $\partial\varphi(x) \neq \emptyset$  при всех  $x \in \text{dom}K$ . Кроме того, функция  $\varphi$  непрерывна на  $\text{ridom}K$  (теорема 10.1 [9]) и в каждой точке  $x \in \text{dom}K$  существует производная  $\varphi'(x; \bar{x})$  функции  $\varphi$  по любому направлению  $\bar{x}$  (конечная или бесконечная), которая в точках непрерывности функции  $\varphi$  вычисляется при любом  $y \in S(x)$  по формуле

$$\varphi'(x; \bar{x}) = \max_{\xi \in \partial\varphi(x)} \langle \xi, \bar{x} \rangle = \max_{\lambda \in \Lambda(x,y)} \langle v + \sum_{i=1}^s \lambda_i a^i, \bar{x} \rangle.$$

С другой стороны, по Лемме 3.1 многозначное отображение  $K$  в любой точке  $x \in \text{dom}K$  является  $R$ -регулярным относительно  $\text{dom}K$ . Пусть  $x^0 \in \text{dom}K$ ,  $y^0 \in S(x^0)$ . Тогда в силу Леммы 4.2 получим, что  $\varphi$  непрерывна в  $x^0$  относительно  $\text{dom}K$ .

В силу Следствия 3.1 многозначное отображение  $S$  является глобально  $R$ -регулярным относительно  $\text{dom}S$  в любой точке  $(x,y) \in \text{gr}S$ . Следовательно, по Лемме 3.2 найдется число  $M > 0$  такое, что оптимальное решение задачи (BLPP) будет глобальным решением задачи

$$\Phi(x,y) = F(x,y) + M[\langle v, x \rangle + \langle p, y \rangle - \varphi(x)] \rightarrow \min_{x,y}, (x,y) \in C, \quad (10)$$

где  $C = \{(x,y) \mid \langle a^i, x \rangle + \langle b^i, y \rangle \leq d_i, i \in I, \langle A^j, x \rangle \leq D_j, j \in J\}$ .

Задача (10) является задачей глобальной минимизации вогнутой функции на выпуклом многограннике, в которой, как известно, оптимальные решения находятся на вершинах многогранника. Можно использовать известные в литературе алгоритмы нахождения глобальных решений [12]. Тем не менее известно [12], что с вычислительной точки зрения такие задачи в общем случае не поддаются решению при числе переменных, превышающем 30, а ввиду отсутствия дифференцируемости целевой функции в задаче (10) ситуация многократно усложняется. Последнее обстоятельство заставляет обратиться к поиску локальных решений.

Обозначим через  $\Phi'(x^0, y^0; \bar{x}, \bar{y})$  производную функции  $\Phi$  в точке  $(x^0, y^0)$  по направлению  $(\bar{x}, \bar{y})$ , то есть

$$\Phi'(x^0, y^0; \bar{x}, \bar{y}) = \langle c, \bar{x} \rangle + \langle q, \bar{y} \rangle + M(\langle v, \bar{x} \rangle + \langle p, \bar{y} \rangle - \varphi'(x^0; \bar{x})) = \langle c + Mv, \bar{x} \rangle + \langle q + Mp, \bar{y} \rangle - M\varphi'(x^0; \bar{x}).$$

Необходимое условие оптимальности точки  $(x^0, y^0) \in C$  в задаче (10) имеет вид [11]

$$\Phi'(x^0, y^0; \bar{x}, \bar{y}) \geq 0 \quad \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in T_C(x^0, y^0), \text{ где } T_C(x^0, y^0) - \text{касательный конус множества } C \text{ в точке } (x^0, y^0) \in C, \text{ который в случае задачи (BLPP) может быть записан в виде}$$

$$T_C(x^0, y^0) = \{(\bar{x}, \bar{y}) \mid \bar{x} = t(x - x^0), \bar{y} = t(y - y^0) \quad \forall t \geq 0, (x,y) \in C\}.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 4.3** (необходимое условие оптимальности в задаче (BLPP)). Для того чтобы точка  $(x^0, y^0) \in C$  была решением задачи (BLPP), необходимо, чтобы неравенство

$$\langle c + Mv, x - x^0 \rangle + \langle q + Mp, y - y^0 \rangle - M\varphi'(x^0; x - x^0) \geq 0 \quad (11)$$

выполнялось для всех  $(x,y) \in C$ .

Точку  $(x^0, y^0) \in C$ , для которой выполняется условие (11), будем называть строго стационарной точкой задачи (BLPP).

**Лемма 4.4.** Точка  $(x^0, y^0) \in C$  является строго стационарной в задаче (BLPP) тогда и только тогда, когда неравенство

$$\langle c - M \sum_{i=1}^s \lambda_i a^i, x - x^0 \rangle + \langle q + Mp, y - y^0 \rangle \geq 0 \quad (12)$$

выполняется для всех  $(x,y) \in C$  и всех  $\lambda \in \Lambda(x^0, y^0)$ .

*Доказательство.* Действительно, для любых  $\xi = v + \sum_{i=1}^s \lambda_i a^i \in \partial\varphi(x^0)$  и  $\lambda \in \Lambda(x^0, y^0)$

$$\langle c + Mv, x - x^0 \rangle + \langle q + Mp, y - y^0 \rangle - M\varphi'(x^0; x - x^0) \leq \langle c + Mv - M\xi, x - x^0 \rangle + \langle q + Mp, y - y^0 \rangle =$$

$$= \langle c + Mv - M(v + \sum_{i=1}^s \lambda_i a^i), x - x^0 \rangle + \langle q + Mp, y - y^0 \rangle = \langle c - M \sum_{i=1}^s \lambda_i a^i, x - x^0 \rangle + \langle q + Mp, y - y^0 \rangle,$$

то есть из (11) следует (12). С другой стороны, поскольку функция  $\varphi$  непрерывна в точке  $x^0$  относительно  $\text{dom}K$ , то для любой точки  $x \in \text{dom}K$  существует вектор  $\xi \in \partial\varphi(x^0)$  такой, что  $\varphi'(x^0; x - x^0) = \langle \xi, x - x^0 \rangle$  (см. теорему 2.3.5 [11]). Тогда из (12) следует (11).

Точку  $(x^0, y^0) \in C$  будем называть стационарной точкой задачи (BLPP), если для нее существует вектор  $\lambda \in \Lambda(x^0, y^0)$  такой, что  $\langle c - M \sum_{i=1}^s \lambda_i a^i, x - x^0 \rangle + \langle q + Mp, y - y^0 \rangle \geq 0$  для всех  $(x, y) \in C$ .

Нетрудно проверить, используя Лемму Фаркаша [6], что если точка  $(x^0, y^0)$  стационарная, то существуют числа  $\alpha_i \geq 0, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, s, \mu_j \geq 0, j = 1, \dots, l$  такие, что  $\lambda_i h_i(x^0, y^0) = 0$  и  $\alpha_i h_i(x^0, y^0) = 0$  при  $i = 1, \dots, s, \mu_j g_j(x^0) = 0$  при  $j = 1, \dots, l$  и

$$\nabla_x F(x^0, y^0) + \sum_{j=1}^l \mu_j \nabla g_j(x^0) + \sum_{i=1}^s (\alpha_i - M\lambda_i) \nabla_x h_i(x^0, y^0) = 0,$$

$$\nabla_y F(x^0, y^0) + \sum_{i=1}^s (\alpha_i - M\lambda_i) \nabla_y h_i(x^0, y^0) = 0, \quad \nabla_y f(x, y) + \sum_{i=1}^s \lambda_i \nabla_y h_i(x^0, y^0) = 0$$

Следовательно, стационарная в нашем смысле точка является так называемой *KN-стационарной* (см. [13–15]) в задаче двухуровневого программирования.

Если точка  $(x^0, y^0) \in C$  не стационарная, то для любого вектора  $\lambda \in \Lambda(x^0, y^0)$  найдется точка  $(x^1, y^1) \in C$  такая, что

$$\langle c - M \sum_{i=1}^s \lambda_i a^i, x^1 - x^0 \rangle + \langle q + Mp, y^1 - y^0 \rangle < 0. \quad (13)$$

Полагая  $\xi = v + \sum_{i=1}^s \lambda_i a^i$ , неравенство (13) можно записать в виде

$$0 > \langle c - M \sum_{i=1}^s \lambda_i a^i, x^1 - x^0 \rangle + \langle q + Mp, y^1 - y^0 \rangle = \langle c + Mv - M\xi, x^1 - x^0 \rangle + \langle q + Mp, y^1 - y^0 \rangle.$$

Отсюда, с учетом  $\varphi(x^0 + t(x^1 - x^0)) - \varphi(x^0) \geq t\langle \xi, x^1 - x^0 \rangle$ , получаем

$$\begin{aligned} \Phi(x^1, y^1) - \Phi(x^0, y^0) &= \langle c + Mv, x^1 - x^0 \rangle + \langle q + Mp, y^1 - y^0 \rangle - M\varphi(x^0 + t(x^1 - x^0)) + M\varphi(x^0) \leq \\ &\leq \langle c + Mv - M\xi, x^1 - x^0 \rangle + \langle q + Mp, y^1 - y^0 \rangle = \langle c - M \sum_{i=1}^s \lambda_i a^i, x^1 - x^0 \rangle + \langle q + Mp, y^1 - y^0 \rangle < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, точка  $(x^1, y^1) \in C$ , удовлетворяющая условию (13), дает значение целевой функции  $\Phi(x^1, y^1) < \Phi(x^0, y^0)$ .

### Алгоритм вычисления стационарных точек

1. Выберем вершину  $(x^0, y^0) \in C$ .

Найдем ближайшую к  $y^0$  точку  $\tilde{d}^0$  на множестве  $S(x^0)$ .

Возьмем  $\lambda^0 \in \Lambda(x^0, y^0)$ .

2.  $k$ -я итерация ( $k \geq 1$ ):

а) с помощью симплекс-метода найдем решение  $(x^k, y^k)$  задачи линейного программирования

$$\langle c - M \sum_{i=1}^s \lambda_i^{k-1} a^i, x - x^{k-1} \rangle + \langle q + Mp, y - y^{k-1} \rangle \rightarrow \min_{(x, y) \in C};$$

б) если  $\langle c - M \sum_{i=1}^s \lambda_i^{k-1} a^i, x^k - x^{k-1} \rangle + \langle q + Mp, y^k - y^{k-1} \rangle = 0$ , то  $(x^{k-1}, y^{k-1})$  – стационарная точка и

процесс останавливается. Если  $\langle c - M \sum_{i=1}^s \lambda_i^{k-1} a^i, x^k - x^{k-1} \rangle + \langle q + Mp, y^k - y^{k-1} \rangle < 0$ , то переходим к следующему шагу;

в) находим проекцию  $\tilde{y}^k$  точки  $y^k$  на множество  $S(x^k)$ ;

г) решаем задачу  $\langle \sum_{i=1}^s \lambda_i a^i, x^{k+1} - x^k \rangle \rightarrow \max_{\lambda \in \Lambda(x^k, \tilde{y}^k)}$  и находим ее решение  $\lambda^k$ ;

д) переходим к  $(k+1)$ -й итерации.

Поскольку при решении задачи линейного программирования симплекс-методом происходит переход по вершинам многогранника, то потребуется конечное число итераций приведенного выше алгоритма, чтобы прийти к стационарной точке. При этом на каждой итерации значение целевой функции уменьшается.

Применение разработанного алгоритма к тестовым примерам [16–18], используемым в литературе для исследования алгоритмов двухуровневой оптимизации, показывает его эффективность.

### Список литературы

1. Dempe S. Foundations of Bilevel programming. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, 2002. 304 p.
2. Bard J.F. Practical Bilevel Optimization. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. 476 p.
3. Ye J.J., Zhu D.L. Optimality conditions for bilevel programming problems // Optimization. 1995. № 33. P. 9–27.
4. Ye J.J., Zhu D.L., Zhu Q.J. Exact penalization and necessary optimality conditions for generalized bilevel programming problems // SIAM J. Optimiz. 1997. № 7. P. 481–507.
5. Morukhovich B.S., Nam M.N., Phan H.M. Variational analysis of marginal function with applications to bilevel programming problems // J. Optim. Theory Appl. 2012. № 152. P. 557–586.
6. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1971. 469 с.
7. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. Multivalued Analysis and Nonlinear Programming Problems with Perturbations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 220 p.
8. Hoffman A.J. On approximate solutions of systems of linear inequalities // J. Res. Natl. Bureau Stand. 1952. № 49. P. 263–265.
9. Федоров В.В. Численные методы максимина. М., Наука, 1979. 278 с.
10. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
11. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
12. Хамисов О.В. Методы выпуклых и вогнутых опорных функций в задачах глобальной оптимизации: автореферат дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Иркутск, 2010. 35 с.
13. Dempe S., Dutta J., Mordukhovich B.S. New necessary optimality conditions in optimistic bilevel programming // Optimization. 2007. № 56. P. 577–604.
14. Dempe S., Zemkoho A.B. The bilevel programming problem: reformulations, constraint qualifications and optimality conditions // Mathematical Programming. 2013. № 138 (1-2). P. 447–473.
15. Dempe S., Mordukhovich B.S., Zemkoho A.B. Necessary optimality conditions in pessimistic bilevel programming // Optimization. 2014. № 63. P. 505–533.
16. A new method for strong-weak linear bilevel programming problem / Y. Zheng [et al.] // J. Industrial and Management Optimization. 2015. Vol. 11, № 2. P. 529–547.
17. Cao D., Leung L.C., A partial cooperation model for non-unique linear two-level decision problems // European J. of Operational Research. 2002. № 140. P. 134–141.
18. Glackin J., Ecker J.G., Kupferschmid M. Solving bilevel linear programs using multiple objective linear programming // J. Optimiz. Theory and Appl. 2009. № 140. P.197–212.

### References

1. Dempe S. Foundations of Bilevel programming. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, 2002. 304 p.
2. Bard J.F. Practical Bilevel Optimization. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. 476 p.
3. Ye J.J., Zhu D.L. Optimality conditions for bilevel programming problems // Optimization. 1995. № 33. P. 9–27.
4. Ye J.J., Zhu D.L., Zhu Q.J. Exact penalization and necessary optimality conditions for generalized bilevel programming problems // SIAM J. Optimiz. 1997. № 7. P. 481–507.
5. Morukhovich B.S., Nam M.N., Phan H.M. Variational analysis of marginal function with applications to bilevel programming problems // J. Optim. Theory Appl. 2012. № 152. P. 557–586.
6. Rokafellar R.T. Vypuklyj analiz. M.: Mir, 1971. 469 s. (in Russ.)
7. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. Multivalued Analysis and Nonlinear Programming Problems with Perturbations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 220 p.
8. Hoffman A.J. On approximate solutions of systems of linear inequalities // J. Res. Natl. Bureau Stand. 1952. № 49. P. 263–265.
9. Fedorov V.V. Chislennyye metody maksimina. M., Nauka, 1979. 278 s. (in Russ.)
10. Klark F. Optimizacija i negladkij analiz. M.: Nauka, 1988. 280 s. (in Russ.)
11. Pshenichnyj B.N. Vypuklyj analiz i jekstremal'nye zadachi. M.: Nauka, 1980. 319 s. (in Russ.)
12. Hamisov O.V. Metody vypuklyh i vognutyh opornyh funkcij v zadachah global'noj optimizacii: avtoreferat dissertacii ... d-ra fiz.-mat. nauk. Irkutsk, 2010. 35 s. (in Russ.)
13. Dempe S., Dutta J., Mordukhovich B.S. New necessary optimality conditions in optimistic bilevel programming // Optimization. 2007. № 56. P. 577–604.
14. Dempe S., Zemkoho A.B. The bilevel programming problem: reformulations, constraint qualifications and optimality conditions // Mathematical Programming. 2013. № 138 (1-2). P. 447–473.

15. Dempe S., Mordukhovich B.S., Zemkoho A.B. Necessary optimality conditions in pessimistic bilevel programming // Optimization. 2014. № 63. P. 505–533.
16. A new method for strong-weak linear bilevel programming problem / Y. Zheng [et al.] // J. Industrial and Management Optimization. 2015. Vol. 11, № 2. P. 529–547.
17. Cao D., Leung L.C., A partial cooperation model for non-unique linear two-level decision problems // European J. of Operational Research. 2002. № 140. P. 134–141.
18. Glackin J., Ecker J.G., Kupferschmid M. Solving bilevel linear programs using multiple objective linear programming // J. Optimiz. Theory and Appl. 2009. № 140. P.197–212.

#### **Сведения об авторах**

Минченко Л.И., д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры информатики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Бережнов Д.Е., ассистент кафедры информатики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

#### **Information about the authors**

Minchenko L.I., D.Sci., professor, professor of informatics department of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

Berezhnov D.E., assistant of the informatics department of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

#### **Адрес для корреспонденции**

220013, Республика Беларусь,  
г. Минск, ул. П. Бровки, д. 6,  
Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники  
+375-17-293-86-66;  
e-mail: inform@bsuir.by  
Бережнов Даниил Евгеньевич

#### **Address for correspondence**

220013, Republic of Belarus,  
Minsk, P. Brovka st., 6,  
Belarusian state university  
of informatics and radioelectronics  
+375-17-293-86-66;  
e-mail: inform@bsuir.by  
Berezhnov Daniil Evgenyevich