УДК 517.977

О ЧАСТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ ДВУХУРОВНЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕЙ НИЖНЕГО УРОВНЯ

Д.Е. БЕРЕЖНОВ, Л.И. МИНЧЕНКО

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 19 июня 2017

Аннотация. Задачам двухуровневого программирования (bilevel programming) посвящены многочисленные публикации. Несмотря на внешнюю простоту постановки, данные задачи весьма сложны для численного решения, и значительная часть исследований в двухуровневом программировании сводится к выделению отдельных классов доступных для численного анализа задач. Одним из таких классов являются двухуровневые задачи, обладающие свойством частичной устойчивости (partial calmness). В статье доказывается глобальная частичная устойчивость задачи двухуровневого программирования с линейной задачей нижнего уровня.

Ключевые слова: оптимизация, двухуровневое программирование, частичная устойчивость.

Abstract. Numerous publications are devoted to bilevel programming problems. Despite a seemingly simple statement these problems are considerably difficult for numerical solving, and a significant part of research in the field of bilevel programming is devoted to identifying particular subsets of problems that allow for a numerical solution. One of such subsets consists of bilevel problems that possess the partial calmness property. Global partial calmness of bilevel programming problems with a linear lower-level problem is proven in this article.

Keywords: optimization, bilevel programming, partial calmness.

Doklady BGUIR. 2017, Vol. 107, No. 5, pp. 89-92
On partial calmness for bilevel programming problem with a linear lower-level problem
D.E. Berezhnov, L.I. Minchenko

Введение

Задачи двухуровневого программирования [1, 2] являются инструментом моделирования сложных иерархических систем в промышленности, технике и экономике. В такого рода задачах верхний уровень иерархической системы принимает решение первым, на основе этого решения нижний уровень принимает в ответ свое решение. Соответственно, задачу принятия решения верхнего уровня называют leader's problem, а задачу нижнего уровня – follower's problem. Решение двухуровневой задачи заключается в том, чтобы найти такое решение верхнего уровня, которое приводит систему к достижению глобальной цели.

Пусть $x \in R^n$, $y \in R^m$. Рассмотрим следующую задачу (BLPP) двухуровневого программирования:

$$G(x,y) \to \min,$$
$$x \in X = \{x \in R^n \big| g_j(x) \le 0 \quad j \in J\}, \tag{1}$$
$$y \in S(x) = Arg\min\{f(x,y) \mid y \in F(x)\},$$

где $F(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x, y) \le 0 \;\; i \in I\}$, функции $G(x, y)$, $f(x, y)$, $g_j(x)$ и $h_i(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, $I = \{1, \ldots, p\}$, $J = \{1, \ldots, s\}$.

Точка (x, y) называется допустимой в задаче (BLPP), если она удовлетворяет ограничениям $x \in X$ и $y \in S(x)$. Допустимая точка (x^0, y^0) называется оптимальным решением (локальным оптимальным решением) двухуровневой задачи, если $G(x^0, y^0) \le G(x, y)$ для всех допустимых точек (x, y) (из окрестности (x^0, y^0)).

Для решения задачи (BLPP) будет использован подход [3], основанный на использовании функции оптимального значения задачи нижнего уровня. Введем функцию оптимального значения задачи нижнего уровня $\varphi(x) = \min\{f(x, y) \mid y \in F(x)\}$.

Тогда задачу (BLPP) можно записать в виде равносильной одноуровневой задачи:

$$G(x, y) \to \min_{x,y}, \ x \in X, \ y \in S(x) = \{y \in F(x) \mid f(x, y) \le \varphi(x)\}. \tag{2}$$

Определенную проблему в данном подходе создает присутствие в ограничениях задачи (2) негладкой функции φ. В [3] предложен метод, позволяющий при определенных условиях перенести негладкость из ограничений в целевую функцию задачи верхнего уровня.

Следуя [3], задачу (2) называют частично устойчивой (partial calm) в оптимальной точке (x^0, y^0), если найдется число $\mu > 0$ такое, что точка (x^0, y^0) является локальным оптимальным решением задачи

$$G(x, y) + \mu(f(x, y) - \varphi(x)) \to \min, \ x \in X, \ y \in F(x). \tag{3}$$

В [3] была доказана частичная устойчивость задачи (2) при условии линейности по переменным x, y целевой функции и ограничений задачи нижнего уровня. Более общий результат получен в [4] при условии линейности целевой функции и ограничений задачи нижнего уровня по переменной y. В статье обобщаются результаты [3] и частично [4] и доказывается глобальный характер частичной устойчивости в случае линейности целевой функции и ограничений задачи нижнего уровня по переменной y.

Основные результаты

Будем рассматривать задачу (BLPP) при дополнительном условии (H1): $f(x, y) = \langle a_0, y\rangle$, $h_i(x, y) = \langle a_i, y\rangle + b_i(x)$, где a_0, $a_i \in R^m$, $b_i(x)$ – скалярные функции.

Обозначим $b_0(x) = -\varphi(x)$, $h_0(x, y) = \langle a_0, y\rangle + b_0(x)$, $I(x, y) = \{i \in I \mid h_i(x, y) = 0\}$. Тогда $S(x) = \{y \in F(x) \mid h_0(x, y) \le 0\}$. Известно (см., например, [5, 6]), что при выполнении условия (H1) касательный конус $T_{F(x)}(y)$ к множеству $F(x)$ в точке $y \in F(x)$ определяется как $T_{F(x)}(y) = clcon(F(x) - y) = \{\bar{y} \in R^m \,|\, \langle a_i, \bar{y}\rangle \le 0 \ \ i \in I(x, y)\}$, а нормальный конус $N_{S(x)}(y)$ к множеству $S(x)$ в точке $y \in S(x)$ задается условием $N_{S(x)}(y) = \{\sum_{i\in\{0\}\cup I(x,y)} \lambda_i a_i \,|\, \lambda_i \ge 0 \ \ i \in \{0\} \cup I(x, y)\}$.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (H1). *Тогда существует число* $M > 0$ *такое, что для любого вектора* $v \in F(x)$ *и любого* $x \in \mathrm{dom}S$ *справедливо неравенство*

$$d(v, S(x)) \le M \max\{0, \ \langle a_0, v\rangle + b_0(x)\}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы.

Положим $h(x, y) = \max\{h_i(x, y) \mid i = 0, 1, \ldots, p\}$. Тогда $S(x) = \{y \in R^m \mid h(x, y) \le 0\}$. Зафиксируем любую точку $x \in \mathrm{dom}S$. Если $v \in S(x)$, то неравенство (4) выполняется при любом $M > 0$.

Пусть y – произвольная граничная точка множества $S(x)$. Рассмотрим множество точек $v \in F(x) \setminus S(x)$ таких, что $d(v, S(x)) = |v - y|$. Это множество совпадает с множеством $\{v = y(t) \,|\, y(t) = y + tl, \ l \in N_{S(x)}(y) \cap T_{F(x)}(y), \ |l| = 1\}$, где $t = d(v, S(x))$.

Обозначив $N(x, y) = \{l \in R^m \,|\, l \in N_{S(x)}(y) \cap T_{F(x)}(y), \ |l| = 1\}$ и принимая во внимание, что $a_i \in N_{F(x)}(y)$ при $i \in I(x, y)$, получим для каждого $l \in N(x, y)$ следующее неравенство:

$$h(x,v) = h(x, y(t)) \ge \max_{i\in\{0\}\cup I(x,y)} h_i(x, y(t)) = \max_{i\in\{0\}\cup I(x,y)} \{\langle a_i, y\rangle + t\langle a_i, l\rangle + b_i(x)\} =$$

$$= t \max_{i\in\{0\}\cup I(x,y)} \langle a_i, l\rangle = t\langle a_0, l\rangle \ge t \min_{l\in N(x,y)} \langle a_0, l\rangle = t\delta(x, y). \tag{5}$$

Допустим $\delta(x, y) \le 0$. Тогда найдется вектор $l^0 \in N(x, y)$ такой, что $\delta(x,y) = \langle a_0, l^0 \rangle \le 0$. Так как $h_i(x, y) < 0$ при $i \notin I(x, y)$, то вследствие непрерывности функций $h_i(x, y)$ по y существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $h_i(x, y+\varepsilon l^0) = \langle a_i, y\rangle + b_i(x) + \varepsilon\langle a_i, l^0\rangle < 0$ при $i \notin I(x, y)$ для всех положительных $\varepsilon \le \varepsilon_0$. Следовательно, поскольку $y + \varepsilon l^0 \notin S(x)$ для всех $\varepsilon_0 \ge \varepsilon > 0$, то при всех положительных $\varepsilon \le \varepsilon_0$ справедливо

$$0 < h(x, y+\varepsilon l^0) = \max_{i\in\{0\}\cup I(x,y)} h_i(x, y+\varepsilon l^0) = \max_{i\in\{0\}\cup I(x,y)} \{\langle a_i, y\rangle + \varepsilon\langle a_i, l^0\rangle + b_i(x)\} =$$

$$= \varepsilon \max_{i\in\{0\}\cup I(x,y)} \langle a_i, l^0\rangle = t\langle a_0, l^0\rangle = \varepsilon\delta(x,y) \le 0.$$

Полученное противоречие говорит о том, что $\delta(x,y) = \min_{l\in N(x,y)} \langle a_0, l\rangle > 0$.

Так как векторы a_i не зависят от x, то $N(x, y)$, а значит, и $\delta(x, y)$ полностью определяются выбором подмножества $I(x, y)$ в $I = \{1, \dots, p\}$. Отсюда следует, что $\delta(x, y) \ge \delta > 0$, поскольку существует лишь конечное число подмножеств $I(x, y)$ множества I, когда y пробегает все граничные точки множества $S(x)$, а x пробегает все точки $\mathrm{dom}S$.

Так как любая точка $v \in F(x) \setminus S(x)$ представима в виде $v = y + tl$, где $l \in N_{S(x)}(y) \cap T_{F(x)}(y)$, $|l| = 1$, $t > 0$, y – граничная точка $S(x)$, то из (5) следует, что справедливо $h(x, v) \ge \delta t \ge \delta d(v, S(x))$, откуда $d(v, S(x)) \le \frac{1}{\delta}\max\{0,\ \langle a_i, v\rangle + b_i(x) \mid i = 0,1,\dots,p\} \le \frac{1}{\delta}\max\{0,\ \langle a_0, v\rangle + b_0(x)\}$.

Положим $D = \{(x,y) \mid h_i(x,y) \le 0 \quad i\in I,\ g_j(x) \le 0 \quad j \in J\}$ и $C = \{(x,y)\in D \mid h_0(x,y) \le 0\}$.

Множествам D и C соответствуют многозначные отображения $D(\cdot): x \mapsto D(x) = (y\in R^m \mid (x,y)\in D\}$ и $C(\cdot): x\mapsto C(x) = (y \in R^m \mid (x,y)\in C\}$.

Будем предполагать, что $\mathrm{dom}D(\cdot) = \mathrm{dom}C(\cdot)$. Отметим естественный характер данного предположения, которое означает, что follower может дать ответ на любое допустимое решение leader'а. Из данного непосредственно предположения следует, что $d(y, C(x)) = d((x,y), \{x\}\times C(x)) \ge d((x,y), C)$ для любой точки $z = (x, y) \in D$.

Теорема 1. *Пусть допустимая точка* $z^0 = (x^0, y^0)$ *является решением задачи (BLPP) с предположениями* (H1) *и* $\mathrm{dom}D(\cdot) = \mathrm{dom}C(\cdot)$*, а функция* G *липшицева на множестве* D *с постоянной Липшица* $l_0 > 0$. *Тогда найдется число* $\mu_0 > 0$ *такое, что при любом* $\mu > \mu_0$ *данная точка будет глобальным решением задачи* $G(x, y) + \mu(f(x, y) - \varphi(x)) \to \min$, $(x, y) \in D$.

Доказательство. В силу Предложения 2.4.3 [7] точка z^0 является при любом $\alpha > l_0$ решением задачи $G(z) + \alpha d(z, C) \to \min$ на множестве D.

Тогда для всех $z = (x,y)\in D$ справедливо $d(z, C) \le d(y, C(x))$ и, следовательно, $G(z) + \alpha d(y, C(x)) \ge G(z^0) + \alpha d(y^0, C(x^0)) = G(z^0)$.

Отсюда, применяя лемму 1 к множествам $D(x)$ и $C(x)$ (вместо $F(x)$ и $S(x)$), получим $G(z) + \alpha M \max\{0, h_0(z)\} \ge G(z^0)$ для всех $z = (x, y) \in D$. Поскольку $\max\{0, h_0(x, y)\} = f(x, y) - \varphi(x)$, последнее неравенство равносильно утверждению теоремы при $\mu_0 = l_0 M$.

Теорема 1 рассматривает более общий случай задачи (BLPP) по сравнению с классической работой [3]. При этом в отличие от [3] доказывается, что решение задачи (BLPP) является не локальным, а глобальным решением одноуровневой задачи $G(x, y)+\mu(f(x, y)-\varphi(x)) \to \min$. Иными словами, из теоремы 1 следует справедливость глобального свойства частичной устойчивости задачи (BLPP). В [4] доказана частичная устойчивость более общей задачи (BLPP), в которой векторы a_i зависят от x. Однако результат [4], как и [3], имеет локальный характер.

Список литературы

1. Dempe S. Foundations of Bilevel programming. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. 304 p.
2. Bard J.F. Practical Bilevel Optimization. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. 476 p.
3. Ye J.J., Zhu D.L. Optimality conditions for bilevel programming problems // Optimization. 1995. № 33. P. 9–27.
4. Dempe S., Zemkoho A.B. Bilevel programming: reformulations, constraint qualifications and optimality conditions // Math. Program. 2013. № 138. P. 447–473
5. Федоров В.В. Численные методы максимина. М., Наука, 1979. 278 с.

6. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М., Наука, 1980. 319 с.
7. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М., Наука, 1988. 280 с.

References

1. Dempe S. Foundations of Bilevel programming. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. 304 p.
2. Bard J.F. Practical Bilevel Optimization. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. 476 p.
3. Ye J.J., Zhu D.L. Optimality conditions for bilevel programming problems // Optimization. 1995. № 33. P. 9–27.
4. Dempe S., Zemkoho A.B. Bilevel programming: reformulations, constraint qualifications and optimality conditions // Math. Program. 2013. № 138. P. 447–473.
5. Fedorov V.V. Chislennye metody maksimina. M., Nauka, 1979. 278 s. (in Russ.)
6. Pshenichnyj B.N. Vypuklyj analiz i jekstremal'nye zadachi. M., Nauka, 1980. 319 s. (in Russ.)
7. Klark F. Optimizacija i negladkij analiz. M., Nauka, 1988. 280 s. (in Russ.)

Сведения об авторах

Минченко Л.И., д.ф.-м.н, профессор, профессор кафедры информатики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Бережнов Д.Е., ассистент кафедры информатики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Information about the authors

Minchenko L.I., D.Sci., professor, professor of informatics department of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

Berezhnov D.E., assistant of the informatics department of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,
г. Минск, ул. П. Бровки, д. 6,
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
+375-17-293-86-66;
e-mail: inform@bsuir.by
Бережнов Даниил Евгеньевич

Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,
Minsk, P. Brovka st., 6,
Belarusian state university
of informatics and radioelectronics
+375-17-293-86-66;
e-mail: inform@bsuir.by
Berezhnov Daniil Evgenyevich