УДК 621.391; 621.395.44

СМЕЖНО-ГРУППОВЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ

Д.Л. ХОДЫКО, С.Б. САЛОМАТИН

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 20 мая 2012

Рассматривается алгоритм смежно-группового спектрального преобразования со свойством циклического сдвига спектра сигнала. Дается пример применения спектрального преобразования для формирования сигналов с дискретной частотно-фазовой манипуляцией. Предложенное спектральное преобразование также может использоваться для поиска и оценки параметров сложного сигнала.

Ключевые слова: смежно-групповое спектральное преобразование, смежные классы.

Спектральные смежно-групповые преобразования

Дискретное *z*-преобразование сигнала определяется выражением

$$X(z)=\sum_{n=0}^{L-1}S(n)z^{-n}, \tag{1}$$

где $s(n)$ – дискретные отсчеты сигнала; $z=\exp(sT_d)$, $s=j\omega+\sigma$; L – длина преобразования; T_d – интервал дискретизации. При $z=v\exp(j2\pi k/L)$, где v – радиус вектора на комплексной плоскости, выражение (1) сводится к вычислению дискретного преобразования Фурье от взвешенного сигнала $v^{-n}s(n)$ [1, 2], которое в матричном виде записывается как

$$\mathbf{X}=\mathbf{WvS}, \tag{2}$$

где $\mathbf{W}$ – матрица преобразования Фурье, $\mathbf{v}$ – диагональная матрица элементов v^{-n}.

Использование смежных классов преобразования Фурье [3] приводит выражении (2) к следующей записи:

$$\mathbf{F}_T^{(q)}=\mathbf{WU}^{(q)}\mathbf{vS}, \tag{3}$$

где $\mathbf{U}^{(q)}=diag\left[\exp\left(\frac{-j2\pi qn}{L\tilde{\mathrm{Q}}}\right)\right]$; $\tilde{\mathrm{Q}}$ – число смежных классов; $q=0..\tilde{\mathrm{Q}}-1$. Выражение (3) можно представить в виде бичастотного преобразования по параметрам q,k:

$$X(z_1,z_2)=\sum_{n=0}^{N-1}S(n)z_1^{-n}z_2^{-n},$$

где $z_1=v\exp(j2\pi k/L)$; $z_2=\exp\left(j2\pi q/\left(L\tilde{\mathrm{Q}}\right)\right)$.

На рис. 1 показан результат спектрального преобразования дискретно-экспоненциальной функции (ДЭФ) $S(n)=\exp\left(j2\pi n\left(k_S+\Delta k\right)/L\right)$ с дискретной расстройкой по частоте Δk =0,5 и дискретным индексом частоты k_S = 3. Длина сигнала L = 64, радиус v =1. Число смежных классов $\tilde{\mathrm{Q}}$ = 8. Из рис. 1 видно, что максимум энергетического спектра приходится на единственное значение q = 4.

Результат не изменится при умножении (3) на единичную диагональную матрицу: $\mathbf{IF}_T^{(q)}=\mathbf{IF}_T^{(q)}=\mathbf{WIU}^{(q)}\mathbf{vS}$. Единичная матрица может быть представлена через матрицу линейного оператора циклического сдвига [4], тогда прямое и обратное смежно-групповое преобразование (СГП) при $v=1$ будет иметь вид

$$\mathbf{F}_T^{(q,i)}=\mathbf{W}\left(\mathbf{D}^i\mathbf{U}^{(q)}\right)\mathbf{S},\quad \mathbf{S}'=L^{-1}\left(\mathbf{D}^m\mathbf{U}^{(q)}\right)^H\mathbf{W}^{-1}\mathbf{F}_T^{(q,i)},\tag{4}$$

где i,m – показатель степени матрицы циклического сдвига, $i,m=0..L-1$.

Спектр $\mathbf{F}_T^{(q,i)}$ зависит от двух переменных – номера смежного класса q и показателя степени i матрицы циклического сдвига. В таблице приведены свойства матрицы линейного оператора циклического сдвига и свойства $\mathbf{D}^i\mathbf{U}^{(q)}$.

Свойства матрицы циклического сдвига

Свойства матрицы линейного оператора циклического сдвига	Свойства произведения $\mathbf{D}^i\mathbf{U}^{(q)}$
$\left(\mathbf{D}^i\right)^H=\left(\mathbf{D}^{L-i}\right),\left(\mathbf{D}^{L-i}\right)^H=\left(\mathbf{D}^i\right),\mathbf{D}^{-i}=\mathbf{D}^{L-i},\left(\mathbf{D}^i\right)^H\mathbf{D}^i=\mathbf{I}$ $\left(\mathbf{D}^{L-i}\right)^H\mathbf{D}^i\neq\mathbf{D}^{L-i}\left(\mathbf{D}^i\right)^H,\ \left(\mathbf{D}^{L-i}\right)^H\mathbf{D}^i=\mathbf{D}^i\left(\mathbf{D}^{L-i}\right)^H$	$\left(\mathbf{D}^i\mathbf{U}^{(q)}\right)^H\mathbf{D}^i\mathbf{U}^{(q)}=\left(\mathbf{U}^{(q)}\right)^H\mathbf{U}^{(q)}=\mathbf{I}$, $\left(\mathbf{D}^{L-i}\mathbf{U}^{(q)}\right)^H\mathbf{D}^i\mathbf{U}^{(q)}=\left(\mathbf{U}^{(q)}\right)^H\mathbf{D}^{2i}\mathbf{U}^{(q)}$

Справедливость свойств устанавливается прямым вычислением. Например, для матрицы правого сдвига

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{D}^H=\mathbf{D}^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Свойство ортогональности. Произведение операторов разложения и восстановления сигнала из (4)

$$\left(L^{-1}\left(\mathbf{D}^m\mathbf{U}^{(q)}\right)^H\mathbf{W}^{-1}\right)\left(\mathbf{W}\left(\mathbf{D}^i\mathbf{U}^{(q)}\right)\right)=\left(\mathbf{D}^m\mathbf{U}^{(q)}\right)^H\left(\mathbf{D}^i\mathbf{U}^{(q)}\right)=$$
$$=\left(\mathbf{U}^{(q)}\right)^H\mathbf{D}^{L-m}\mathbf{D}^i\mathbf{U}^{(q)}=\left(\mathbf{U}^{(q)}\right)^H\mathbf{D}^{i-m}\mathbf{U}^{(q)}$$

при $\left(i-m\right)\bmod L\equiv 0$ дает единичную диагональную матрицу. Восстановленный сигнал по преобразованию (4) является инвариантным относительно значения q.

В смежно-групповом преобразовании (4) помножим спектр на $\mathbf{D}^i$ и получим пару преобразований

$$\mathbf{F}_T^{(q,i)}=\mathbf{D}^i\mathbf{W}\left(\mathbf{D}^i\mathbf{U}^{(q)}\right)\mathbf{S},\quad \mathbf{S}'=L^{-1}\left(\mathbf{D}^m\mathbf{U}^{(q)}\right)^H\mathbf{W}^{-1}\mathbf{F}_T^{(q,i)}.\tag{5}$$

Выражение (5) позволяет выполнить циклический сдвиг спектра сигнала в частотной области. На рис. 2 приведен пример циклического сдвига линейно-частотно-модулированного сигнала $S(n)=\exp\left(j2\pi nk_S/L+j\alpha_{NB}n^2\right)$ с параметрами k_S =5, L =64, α =0,015. Параметр преобразования $i=40$.

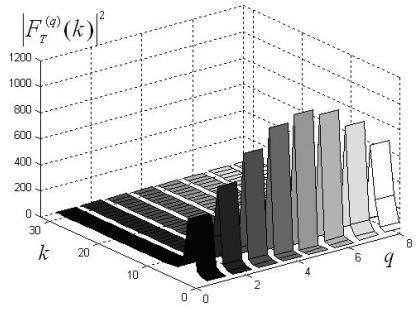


Рис. 1. Бичастотное преобразование дискретно экспоненциальной функции

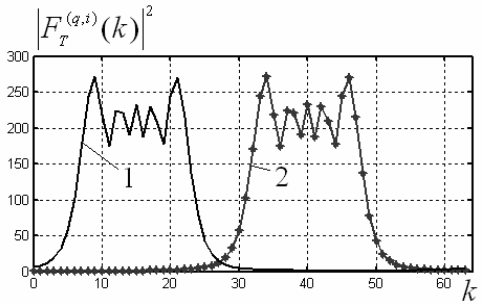


Рис. 2. Энергетический спектр исходного сигнала (1) и его циклически сдвинутый спектр (2)

В общем случае в силу различий i, m сигнал и его спектр не будут соответствовать друг другу. Для соответствия сдвинутого спектра с его временной формой в обратном преобразовании должно выполняться условие $i = m$.

Алгоритм (5), также как и алгоритм (4), частотный сдвиг в пределах смежных классов во временную область не трансформирует. Для сохранения частотного сдвига необходимо применить обратное преобразование (4) с параметрами $m = q = 0$.

Вычислительная сложность преобразования (5) определяется вычислительной сложностью преобразования Фурье. Для (5) на основе алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) типа «бабочка» длиной $L = 2^n$ потребуется $L\log_2(L)$ операций сложения, $0{,}5L\log_2(L) + 2L$ операций комплексного умножения, включая $\mathbf{U}^{(q)}$. Матрицы циклического сдвига заменяются на операции перестановки входных и выходных значений алгоритма БПФ.

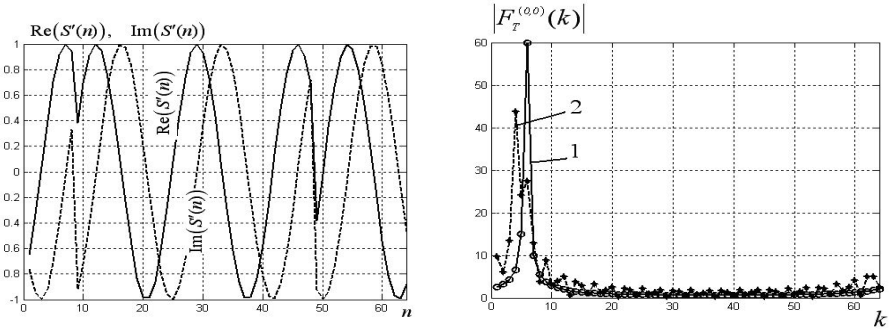
Синтез сигналов с фазовой манипуляцией

Внесем в восстановленный сигнал по преобразованию (4) зависимость от параметра q и запишем выражение для восстановления сигнала как $\mathbf{S}' = L^{-1}\left(\mathbf{D}^m\mathbf{U}^{(q)}\right)\mathbf{W}^{-1}\mathbf{F}_T^{(q,i)}$. Тогда преобразование, связывающее сигналы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}'$, имеет вид

$$\mathbf{S}' = \left(\mathbf{D}^{m+i}\mathbf{U}^{(q)}\right)\mathbf{S}. \qquad (6)$$

Матрица циклического сдвига приводит к фазовому изменению спектра сигнала. Во временной области фазовые изменения соответствуют циклическому сдвигу исходного сигнала на величину $i + m$. В сигнал в виде ДЭФ с дискретной расстройкой по частоте Δk после преобразования (6) добавляются два фазовых изменения на позициях m и $(i+m) \bmod L$, в общем случае пропорциональных значению $2\pi\left(\Delta k - q/\tilde{\mathrm{Q}}\right)$. Значения Δk и $\tilde{\mathrm{Q}}$ определяют возможный набор фазовых изменений. В частном случае, когда $\tilde{\mathrm{Q}}$ = 1, имеем одно изменение фазы сигнала в месте $(i+m) \bmod L$. Наличие смежных классов приводит к дискретному частотному сдвигу не более чем на два значения.

Выбор соответствующих параметров преобразования (6) позволяет получить модели сигналов с дискретным изменением фазы, преобразование (5) выполняет частотный сдвиг спектра сигнала. Указанные свойства позволяют синтезировать сигналы с частотно-фазовой манипуляцией. По преобразованию (6) сформируем сигнал, используя параметры i, m и q. На рис. 2 показан пример синтезированного сигнала с фазовой манипуляцией из ДЭФ с Δk = 0,8 и произвольными параметрами преобразования: $\tilde{\mathrm{Q}}$=4, q=2, i=40, m = 8.



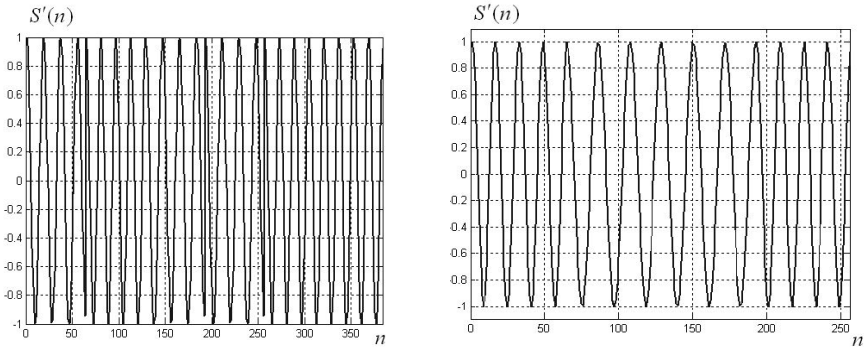
а *б*

Рис. 3. Синтезированный сигнал (*а*) и его спектр (*б*):
1 – спектр исходной ДЭФ, 2 – спектр синтезированного сигнала

Из рис. 3,*а* видно, что фазовые изменения произошли на позициях 8 и 48. Максимум спектра синтезированного сигнала смещен относительно максимума спектра исходной ДЭФ (рис. 3,*б*).

Параметры i, m используются для установки фазового преобразования в заданном месте. Конкатенацией синтезированных реализаций получается сигнал без изменения фазы на краях выборки. Преобразование (6) позволяет формировать сигналы с требуемым числом изменений фазы в синтезированном сигнале, причем в одной выборке длиной L может быть не более двух изменений фазы.

Кодофазоманипулированный (КФМ) сигнал получается из ДЭФ с $\Delta k = 0$ с параметрами преобразования, например, i =0, m =0, $\tilde{Q}$ = 2. В прямом преобразовании (6) q принимает значения 0 или 1 в соответствии со значениями псевдослучайной последовательности (ПСП). КФМ-сигнал также можно получить при i = 0, Δk = 0, $\tilde{Q}$ = 1, управляя m, которое принимает два значения: 0 и $0{,}5L/k$. На рис. 4 а показаны совмещенные реализации синтезированного КФМ-сигнала.



а *б*

Рис. 4. Временные реализации синтезированных КФМ (*а*) и ЧМ (*б*) сигналов

Частотно-манипулированный (ЧМ) сигнал получается из ДЭФ с Δk =0,5 при i = 0, $m = 0$, $\tilde{Q}$ = 4. Значения дискретных частот уточняются выбором q. На рис. 4,*б* показана реализация ЧМ сигнала. Из рис. 4,*б* видно, что в точках соединения сигналов фаза не изменяется, следовательно, может использоваться когерентная обработка синтезированного сигнала. Спектральное преобразование (4) можно применить для детектирования ЧМ-сигналов.

Сигналы с ортогональными частотами в спектральной области получаются из комплексной экспоненты на основании преобразования (5):

$$\mathbf{F}_T^{(q,\mathbf{p},i)} = \left(\sum_{p\in\mathbf{p}} \mathbf{D}^{i-p}\right)\mathbf{W}\left(\left(\sum_{p\in\mathbf{p}} \mathbf{D}^{i-p}\right)\mathbf{U}^{(q)}\right)\mathbf{S},$$

где $\mathbf{p}$ является множеством натуральных чисел размерности L.

Значения из множества $\mathbf{p}$ определяют расположение частот на частотной оси. Во временную область спектр переводится обратным преобразованием со значениями $q=0$, $i=m=0$: $\mathbf{S}_{MF}=L^{-1}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{F}_T^{(q,\mathbf{p},i)}$.

Управление частотами осуществляется значениями из $\mathbf{p}$ и частотным сдвигом i. Это позволяет формировать сигналы с прыгающими частотами по заранее определенному закону и двигать их по частотной оси.

Алгоритм многоканальной спектральной обработки при поиске и оценке параметров сложных сигналов

Быстрые алгоритмы корреляционной обработки реализуются с использованием алгоритмов быстрого преобразования Фурье. Максимальный частотный сдвиг в спектральном преобразовании (5) равен L/T_H. Это может превосходит область неопределенности по частоте $\left[f_{Dop\min}\quad f_{Dop\max}\right]$ при поиске сигнала. Поэтому логично использовать количество сдвигов P, укладывающихся в область неопределенности: $P=\left(\left|f_{Dop\min}\right|+\left|f_{Dop\max}\right|\right)T_H$. С учетом свойства циклического сдвига спектра в преобразовании (5), алгоритм вычисления дискретной функции неопределенности [4]

$$\Phi(k,m)=\left|\sum_{n=0}^{L-1}y(n)G_0(n+m)\exp(-j2\pi kn/L)\right|^2,$$

где $y(n)$ – отсчеты наблюдаемого сигнала; $G_0(n)$ – значения опорной псевдослучайной последовательности, k и m – отсчеты дискретных индексов частоты и задержки соответственно, включает следующие действия.

1. Вычисляется СГП (5) с параметрами $i=0$, $q=0..\tilde{Q}-1$ от входной смеси $y(n)$.

2. Вычисляется СГП (5) с параметрами $i=0..P-1$, $P<L$ и $q=0$ от опорной ПСП $G_0(n)$.

3. Вычисляется спектр $\mathbf{F}_T^{(i,q)}$ сечений двухмерной корреляционной функции r:

$$\mathbf{F}_T^{(i,q)}=F^{(0,q)}\{\mathbf{y}\}\cdot F^{(i,0)}\{\mathbf{G}_0\}^*,$$

где $F^{(i,q)}\{\mathbf{x}\}$ – обозначает спектральное преобразование от $\mathbf{x}$: $\mathbf{F}_T^{(i,q)}=F^{(i,q)}\{\mathbf{x}\}$; $\mathbf{y}$ и $\mathbf{G}_0$ – вектора отчетов входного сигнала и опорной ПСП длиной L.

4. Вычисляются сечения функции неопределенности как обратное СГП (5) от $\mathbf{F}_T^{(i,q)}$ с параметрами $m=i$, $q=0..\tilde{Q}-1$:

$$\Phi^{(i,q)}=\left|L^{-1}\left(\mathbf{D}^i\mathbf{U}^{(q)}\right)^H\mathbf{W}^{-1}\left(\mathbf{D}^i\mathbf{U}^{(q)}\right)\mathbf{F}_T^{(i,q)}\right|^2.$$

5. Оценка параметров сигнала определяется как:

- номер смежного класса $\hat{q}=\arg\max_{i,q}\left(\Phi(k,m)^{(q,i)}\right)$;

- выбор функции неопределенности $\Phi(k,m)=\arg\max_{i,q}\left(\Phi(k,m)^{(q,i)}\right)$;

- дискретный индекс частоты $\hat{k}=\arg\max_{k,m}\left(\Phi(k,m)\right)$;

- дискретный индекс задержки $\hat{m}=\arg\max_{k,m}\left(\Phi(k,m)\right)$;

- оценка частоты допплеровского смещения [3] $\hat{f}_{Dop} = \left(\hat{q} + \hat{k}\tilde{Q}\right) / \left(L\tilde{Q}T_H\right)$, где T_H – интервал анализа.

Спектральный алгоритм поиска сигналов является многоканальным с числом каналов $P \times \tilde{Q}$, работа которых может быть организована в последовательном или параллельном режимах. Свойство циклического сдвига спектра сигнала по частоте позволяет обойтись без произведения опорного гармонического колебания на ПСП, а применение смежных классов повышает точность оценки частоты. Время поиска $P \times \tilde{Q}$-канального спектрального преобразования равно интервалу анализа T_H, что соответствует n-канальному обнаружителю [5].

Вычислительная сложность одного канала составляет $3L\log_2 L$ операций сложения, $1,5L\log_2 L + 6L$ операций умножения.

Выводы

Представлен алгоритм частотно-сдвигового спектрального преобразования, обладающий свойством циклического сдвига спектра сигнала. Изменение параметров алгоритма обработки позволяет синтезировать сигналы с дискретной частотно-фазовой манипуляцией. Причем получаемые ЧМ-сигналы являются когерентными. Вычислительная сложность спектрального преобразования соизмерима с вычислительной сложностью алгоритма быстрого преобразования Фурье. Рассмотрено применение спектрального преобразования для поиска и оценки параметров сложного сигнала. Время поиска составляет интервал анализа. Точность оценки частоты пропорциональна числу смежных классов.

ADJACENT-GROUP SPECTRAL TRANSFORMATION COMPLEX SIGNALS

D.L. KHODYKO, S.B. SALOMATIN

Abstract

An algoritm presented by the adjacent-group transformation of the spectral properties of a cyclic shift of the signal is considered. The transformation is used to generate signals with a frequency-phase-shift keying and to search for complex signals.

Список литературы

1. *Рабинер П., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. М., 1978.
2. *Петько В.И., Куконин В.Е., Шихов Н.Б.* Цифровая фильтрация и обработка сигналов. Мн., 1995.
3. *Ходыко Д.Л., Саломатин С.Б.* // Докл. БГУИР. 2008. №1(31). С. 16-21.
4. *Марпл С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М, 1990.
5. *Тузов Г.И.* Статистическая теория приема сложных сигналов. М., 1977.