

УДК 621.385

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНО-НЕРЕГУЛЯРНОГО ВОЛНОВОДА С НЕОДНОРОДНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ АНИЗОТРОПНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

А.А. КУРАЕВ, Т.Л. ПОПКОВА, А.О. РАК

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 23 марта 2015

Сформулированы в общей форме уравнения возбуждения произвольно-нерегулярного волновода с неоднородным заполнением анизотропным диэлектриком.

*Ключевые слова:* произвольно-нерегулярный волновод, резонатор, анизотропный диэлектрик, уравнения возбуждения.

### Введение

Теория возбуждения нерегулярных волноводов электронными потоками (в общем случае непрямолинейными) является основой моделирования и оптимизации широкого класса мощных электронных приборов сверхвысоких и крайне высоких частот (СВЧ и КВЧ) – релятивистских ламп бегущей и обратной волны (ЛБВ и ЛОВ), гирорезонансных приборов, убитронов и гиротонов. К настоящему времени общие основы трехмерной теории возбуждения продольно-нерегулярных волноводов разработаны [1–7], однако необходимо их развитие в двух направлениях:

а) необходимо учесть возможность частичного заполнения волновода неоднородным анизотропным диэлектриком;

б) в уравнениях возбуждения необходимо учесть конечную проводимость стенок, что особенно важно в КВЧ-диапазоне. Обе задачи решаются в представленной работе.

### Общая постановка и схема решения задачи возбуждения нерегулярного волновода

Рассмотрим задачу возбуждения неоднородно заполненного анизотропным диэлектриком с тензором диэлектрической восприимчивости  $\hat{\epsilon}(\vec{r})$  нерегулярного волновода, боковая поверхность которого  $S_b$  отличается от регулярной цилиндрической поверхности. Эта задача сводится к решению системы уравнений Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\epsilon} \vec{E}) + \mathbf{J}; \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

с граничными условиями [7]:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}]_{S_b} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi \sigma}} \int_0^t \frac{\partial [\mathbf{n}, [\mathbf{H}, \mathbf{n}]]_{S_b}}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad (2)$$

где  $\sigma$  – удельная проводимость стенок волновода,  $\mu_0$  – ее магнитная проницаемость,  $\tau \in [0, t]$  – аргумент интеграла,

и условиями излучения в начальном и конечном сечениях волновода.

Плотность электрического тока  $J$  определяется электронным потоком в приборе. Теория возбуждения нерегулярного волновода строится на основе метода преобразования координат. Для решения задачи введем криволинейную систему координат  $(r, \varphi, s)$ , связанную с геометрией волновода ( $r, \varphi$  – полярные координаты в плоскости поперечного сечения волновода,  $s$  – длина дуги оси волновода). Схема нерегулярного волновода приведена на рис. 1.

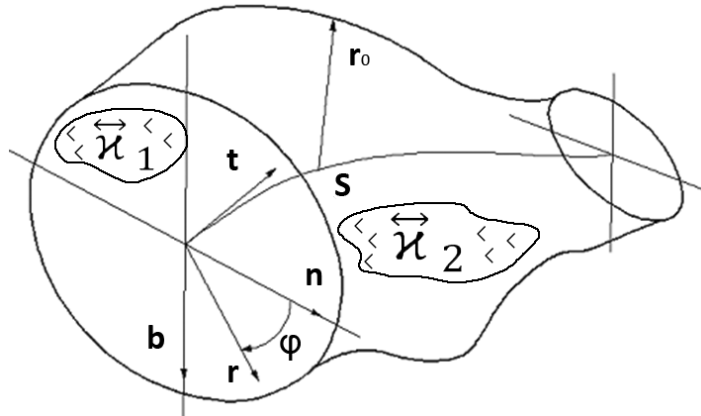


Рис. 1. Геометрия нерегулярного волновода

Здесь  $\mathbf{t} = \mathbf{r}' / |\mathbf{r}'|$  – единичный вектор касательной к оси волновода,  $(\mathbf{x}' = dx/ds)$ ;  $\mathbf{n} = \mathbf{r}'' / |\mathbf{r}''| = \frac{1}{k} \mathbf{r}''$  – единичная нормаль к поверхности;  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$  – бинормаль к оси волновода. Эти три величины связаны с помощью формул Френе – Серре:  $\mathbf{t}' = k\mathbf{n}$ ;  $\mathbf{n}' = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$ ;  $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$ , где  $k = 1/\rho_k = |\mathbf{r}''|$  – угловая скорость вращения касательной вокруг бинормали;  $\rho_k$  – радиус кривизны;  $\tau = 1/\rho_\tau = \frac{1}{k} \mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}'''$  – угловая скорость вращения бинормали вокруг касательной;  $\rho_\tau$  – радиус кручения.

### Уравнения возбуждения нерегулярного волновода

Для решения задачи как и в работах [1–7] введем неортогональную систему координат  $(\rho, \varphi, z)$ . Декартовы прямоугольные координаты произвольной точки  $(x, y, z)$  внутри волновода связаны с введенными координатами  $(\rho, \varphi, s)$  соотношением

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi, s) = \mathbf{R}(s) + \rho \eta_b(\varphi, s) \{ \mathbf{n}(s) \cos(\varphi) + \mathbf{b}(s) \sin(\varphi) \}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор произвольной точки внутри волновода;  $\mathbf{R}(s)$  – уравнение оси волновода в декартовой системе координат;  $\mathbf{n}(s)$  и  $\mathbf{b}(s)$  – единичные векторы главной нормали и бинормали оси волновода, определенные как функции ее длины:

$$\rho = r / \eta_b(\varphi, s); \quad (4)$$

$r = \eta_b(\varphi, s)$  – уравнение контура поперечного сечения волновода в системе координат  $(r, \varphi, s)$ .

Тогда в системе координат  $(\rho, \varphi, s)$  уравнение боковой поверхности рассматриваемого волновода принимает вид

$$\rho = 1. \quad (5)$$

Это позволяет искать решение волновых уравнений (1) в виде разложений по системе базисных функций регулярного цилиндрического волновода. Например, для периодических во времени полей ( $\omega=2\pi/T$ ) можно искать решение (1) для электрической и магнитной напряженностей полей в виде

$$\left. \begin{aligned} E'_t &= \operatorname{Re} \sum_m \dot{\mathbf{E}}_{tm} e^{jm\omega t}; \\ E'_s &= \operatorname{Re} \sum_m \dot{\mathbf{E}}_{sm} e^{jm\omega t}; \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где} \\ \mathbf{E}'_{tm} &= \sum_{i=1}^l \sum_{n=-N}^N \left( \dot{A}_{mni}^E \mathbf{e}_{ni}^E + \dot{A}_{mni}^M \mathbf{e}_{ni}^M \right); \\ \mathbf{E}'_{sm} &= \sum_{i=1}^l \sum_{n=-N}^N \dot{C}_{mni} \varphi_{ni}; \\ \mathbf{H}_m &= \frac{j}{m\omega\mu_0} g^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}_m, \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

а собственные функции регулярного волновода выражены следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} e_{rni}^E &= J'_n(\nu_m \rho) e^{-jn\varphi}; & e_{rni}^M &= -\frac{n}{\mu_{ni}\rho} J_n(\mu_m \rho) e^{-jn\varphi}; \\ e_{\varphi ni}^E &= -\frac{jn}{\nu_{ni}\rho} J_n(\nu_{ni} \rho) e^{-jn\varphi}; & e_{rni}^M &= jJ'_n(\mu_m \rho) e^{-jn\varphi}; \\ \varphi_{ni} &= J_n(\nu_m \rho) e^{-jn\varphi}. \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Здесь  $m$  – номер гармоники основной частоты  $\omega$ ;  $n$  – азимутальный индекс;  $i$  – радиальный индекс;  $j$  – мнимая единица;  $\nu_{ni}$  – корни функции Бесселя ( $J_n(\nu_{ni})=0$ );  $\mu_{ni}$  – корни производной от функции Бесселя ( $J'_n(\mu_{ni})=0$ ). Направляющие векторы новой (косоугольной) системы координат  $(\rho, \varphi, s)$  определяются следующим образом:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \eta_b(\varphi, s) \cdot (\mathbf{n}(s) \cdot \cos \varphi + \mathbf{b}(s) \cdot \sin \varphi) = \eta_b \cdot \mathbf{r}_0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_\varphi &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \rho \cdot \frac{\partial \eta_b}{\partial \varphi} \cdot (\mathbf{n}(s) \cdot \cos \varphi + \mathbf{b}(s) \cdot \sin \varphi) + \\ &+ \rho \cdot \eta_b \cdot (-\mathbf{n}(s) \cdot \sin \varphi + \mathbf{b}(s) \cdot \cos \varphi) = \rho \cdot \frac{\partial \eta_b}{\partial \varphi} \cdot \mathbf{r}_0 + \rho \cdot \eta_b \cdot \boldsymbol{\varphi}_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_s &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \rho \cdot \frac{\partial \eta_b}{\partial s} \cdot (\mathbf{n}(s) \cdot \cos \varphi + \mathbf{b}(s) \cdot \sin \varphi) + \rho \cdot \eta_b \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \\ &\cdot (-\mathbf{n}(s) \cdot \sin \varphi + \mathbf{b}(s) \cdot \cos \varphi) + \boldsymbol{\tau} \cdot (1 - k \cdot \rho \cdot \eta_b) = \\ &= \rho \cdot \frac{\partial \eta_b}{\partial s} \cdot \mathbf{r}_0 + \rho \cdot \eta_b \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\tau} \cdot (1 - k \cdot \rho \cdot \eta_b \cdot \cos \varphi) \end{aligned}$$

Взаимная система контравариантных векторов записывается через основную:

$$\mathbf{a}^i = [\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{a}_{i+2}] / \mathbf{a}_i [\mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{a}_{i+2}];$$

$$\mathbf{a}^1 = \mathbf{a}^\rho = \frac{1}{r_b} \mathbf{r}_0 - \frac{1}{r_b^2} \frac{\partial r_b}{r_b^2 \partial \varphi} \boldsymbol{\varphi}_0 + \frac{\rho}{r_b h_4} \left( \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} \boldsymbol{\tau} - \frac{\partial r_b}{\partial s} \right) \mathbf{t}; \quad (10)$$

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^\varphi = \frac{1}{\rho r_b} \boldsymbol{\varphi}_0 - \frac{\boldsymbol{\tau}}{h_4} \mathbf{t}; \quad \mathbf{a}^3 = \mathbf{a}^s = \mathbf{t}/h_4.$$

Уравнения Максвелла (1) в новых координатах  $(\rho, \varphi, s)$  в ковариантной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{H}' &= \varepsilon_0 g \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + g \mathbf{J}'; \\ \text{rot} \mathbf{E}' &= -\mu_0 g \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь метрический тензор  $g$  записывается как

$$g = \sqrt{g} \begin{vmatrix} g^{11}/\rho, g^{12}, g^{13}/\rho \\ g^{21}, \rho g^{22}, g^{23} \\ g^{31}/\rho, g^{32}, g^{33}/\rho \end{vmatrix}, \quad (12)$$

где  $g^{ij} = (\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j)$ ;  $\sqrt{g} = \mathbf{a}^1 [\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3] = \rho r_b^2 h_4$ .

Составляющие метрического тензора следующие:

$$\begin{aligned} g^{11} &= \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_b^4} \left( \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{\rho^2}{r_b^2 h_4^2} \left[ \tau(s) \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} - \frac{\partial r_b}{\partial s} \right]^2; \quad g^{22} = \frac{1}{r_b^2 \rho^2} + \frac{\tau^2(s)}{h_4^2}; \\ g^{12} &= -\frac{1}{r_b^3 \rho} \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} - \frac{\rho \tau(s)}{r_b h_4^2} \left[ \tau(s) \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} - \frac{\partial r_b}{\partial s} \right]; \quad g^{23} = -\frac{\tau(s)}{h_4^2}; \\ g^{13} &= \frac{\rho}{r_b h_4^2} \left[ \tau(s) \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} - \frac{\partial r_b}{\partial s} \right]; \quad g^{33} = \frac{1}{h_4^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $h_4 = 1 - \rho r_b(\varphi, s) k(s) \cos \varphi$ ;  $k(s), \tau(s)$  – соответственно кривизна и кручение оси волновода. Реальные физические векторы определяются через расчетные (штрихованные) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E'_\rho \mathbf{a}^1 + E'_\varphi \rho \mathbf{a}^2 + E'_s \mathbf{a}^3; \\ \mathbf{H} &= H'_\rho \mathbf{a}^1 + H'_\varphi \rho \mathbf{a}^2 + H'_s \mathbf{a}^3; \\ \mathbf{J} &= J'_\rho \mathbf{a}^1 + J'_\varphi \rho \mathbf{a}^2 + J'_s \mathbf{a}^3. \end{aligned} \quad (14)$$

Для решения (11) воспользуемся методом Галеркина, который заключается в том, что коэффициенты разложений (7) определяются из условия ортогональности невязок уравнения (11) собственным векторам разложения (8) при любом  $s$ :

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot} \left( g^{-1} \text{rot} \mathbf{E}' \right) + \mu_0 g \left[ \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}'}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (\dot{\mathbf{z}} \bar{\mathbf{E}}')}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{J}'}{\partial t} \right] \right\} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{ni}^{E, M^*} \rho d\varphi d\rho e^{-im\omega t} d\omega t = 0, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot} \left( g^{-1} \text{rot} \mathbf{E}' \right) + \mu_0 g \left[ \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}'}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (\dot{\mathbf{z}} \bar{\mathbf{E}}')}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{J}'}{\partial t} \right] \right\} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{ni} \rho d\varphi d\rho e^{-im\omega t} d\omega t = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Это наиболее общее решение задачи возбуждения волновода произвольной формы с неоднородным включением анизотропных диэлектрических элементов.

### **Заключение**

Полученные общие уравнения (15) могут быть конкретизированы для любого частного случая. Кроме того, при  $\vec{J} = 0$  они могут быть использованы для расчета пассивных элементов на нерегулярных волноводах с включениями анизотропных диэлектрических элементов.

## **EXCITATION OF ARBITRARY IRREGULAR WAVEGUIDE WITH AN INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC DIELECTRIC FILLING**

A.A. KURAYEV, T.L. POPKOVA, A.O. RAK

### **Abstract**

A general form of the equation excitation arbitrary irregular waveguide with an inhomogeneous anisotropic dielectric filling is formulated.

### **Список литературы**

1. *Кураев А. А.* // Известия АН БССР, Сер. ФТН. 1979. № 1. С. 121–127.
2. *Кураев А. А.* Теория и оптимизация электронных приборов СВЧ. Минск, 1979.
3. *Кураев А. А.* Мощные приборы СВЧ. Методы анализа и оптимизации параметров. М., 1986.
4. *Кураев А.А., Байбурын В.Б., Ильин Е.М.* Математические модели и методы оптимального проектирования СВЧ-приборов. Минск, 1990.
5. *Кураев А. А., Попкова Т.Л., Сеницын А.К.* Электродинамика и распространение радиоволн. Минск, 2004.
6. Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. Том I. Стационарные процессы / Под ред. А. А. Кураева и Д. И. Трубецкова. М., 2009.
7. *Кураев А. А.* // Весці НАН Беларусі. Сер. ФТН. 1999. №4. С. 60–65.