УДК 519.85

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАННЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

С.В. ЧЕБАКОВ, Л.В. СЕРЕБРЯНАЯ

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси
Сурганова, 6, 220006, Минск, Беларусь

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, 220013, Минск, Беларусь

Поступила в редакцию 12 ноября 2014

Предложен метод решения двух комбинаторных задач о нахождении оптимальных подмножеств на заданном множестве начальных данных. Задачи о ранце и о покрытии отрезка основаны на использовании аппарата многокритериальной оптимизации. В разработанных алгоритмах выполняется поиск паретовских элементов во введенном двухкритериальном пространстве.

Ключевые слова: задачи о ранце и о покрытии, множество Парето, паретовские слои, доминируемая и доминирующая альтернативы.

Введение

Имеется конечное множество начальных данных. На основе его отдельных элементов по некоторому правилу формируются допустимые подмножества начальных данных, из которых по заданному критерию определяется оптимальное подмножество. К задачам подобного типа можно отнести, в частности, задачу о ранце [1] и задачу о покрытии [2]. Они относятся к числу *NP*-полных задач [1], в общем случае не имеющих алгоритмов решения с полиномиальной оценкой сложности. Методы их решения основаны на конструировании допустимых подмножеств с использованием различных способов отсечения неконкурентных вариантов, сочетающих в себе эвристические методы и метод ветвей и границ [3]. В работе предлагается способ решения комбинаторных задач данного типа, основанный на многокритериальной оптимизационной модели.

Алгоритм решения задачи о ранце

Рассмотрим следующую постановку задачи о ранце. Каждому варианту из множества начальных данных R соответствует время достижения цели и вероятность ее достижения. Общее время достижения цели при последовательном выполнении альтернативных вариантов из R ограничено величиной T. Допустимым будет такое подмножество, чье суммарное время выполнения альтернатив не превосходит величину T. Среди допустимых подмножеств требуется найти подмножество Q с максимальной суммарной вероятностью. Предполагается, что множество R содержит достаточно большое число вариантов. В этом случае точное нахождение оптимального подмножества Q является серьезной проблемой и требуется разработка нетрадиционных подходов к ее решению.

Будем говорить, что задача о ранце сформулирована в «отрицательной» постановке, если требуется найти все элементы на множестве начальных данных, которые не попадут в оптимальное подмножество Q. Будучи, по сути, эквивалентной традиционной постановке задачи о ранце, она позволяет по-иному представить процесс ее решения и локализировать группу элементов из R, которая содержит элементы Q. В работе [4] на множестве R введено двухкритериальное транзитивное отношение предпочтения. Доминирующим является элемент, имеющий меньшее время и большую вероятность достижения цели. Под частичным решением будем понимать решение комбинаторной задачи на некотором подмножестве ее начальных данных. В [5] проведено разбиение элементов множества *R* на отдельные подмножества p_i. Каждое отдельное p_i в режиме параллельных вычислений разбито на паретовские слои во введенном критериальном пространстве. Доказана теорема о том, что доминируемые элементы на каждом подмножестве p_i не могут попасть в частичное решение на данном подмножестве ранее, чем элемент его доминирующий. На ее основе сформулированы условия, при выполнении которых элементы всех последних, начиная с некоторого номера, паретовских слоев не принадлежат частичным решениям на подмножествах p_i. Далее формируется ориентированный граф, вершины которого представляют собой группы различных подмножеств начальных данных, а ребра указывают, какие подмножества будут рассматриваться на следующем уровне. В каждой вершине графа выполняется операция объединения паретовских слоев на данной группе подмножеств, и вновь определяются элементы начального множества *R*, которые не войдут в соответствующие частичные решения. Из транзитивности отношения предпочтения следует, что эти элементы не могут попасть в частичные решения и на следующих уровнях графа, в частности, и в оптимальное подмножество *Q*, формируемое в конечной вершине графа. Следовательно, они являются частью решения задачи о ранце, сформулированной в «отрицательной» терминологии и исключаются из рассмотрения при построении *Q*.

Рассмотрим ситуацию в конечной вершине графа. Задано множество начальных данных *P*, содержащее все элементы из *R*, которые на предыдущих уровнях не были исключены из рассмотрения и представленное в виде объединения паретовских слоев. Определяем паретовские слои, элементы которых не попадут в оптимальное подмножество *Q* и считаем завершенным алгоритм решения задачи о ранце в «отрицательной» формулировке. В [4] показано, что при выполнении определенных условий паретовские слои разбиваются на группы таким образом, что *Q* может быть полностью сформировано из всех элементов оставшихся паретовских слоев. Проведем оценку сложности алгоритма нахождения оптимального решения. Очевидно, она совпадает с оценкой сложности алгоритма решения задачи о ранце в «отрицательной» формулировке, который представляет собой многократное построение паретовских слоев на подмножествах начального множества данных *R*.

Пусть множество Парето формируется последовательным рассмотрением элементов заданного множества начальных данных и U_m , $m=\overline{1,j}$, представляют собой паретовские множества, полученные после рассмотрения первых *j* элементов. Множество Парето в двухкритериальном пространстве предпочтений обладает следующим свойством [6]: если все его элементы упорядочить по убыванию (возрастанию) предпочтения одного из критериев, то по второму критерию это же расположение элементов соответствует обратному порядку, т.е. возрастанию (убыванию) его предпочтения. Это позволяет использовать при построении множеств U_m алгоритмы двоичного поиска в упорядоченных структурах данных. Тогда сложность алгоритма нахождения множества Парето на множестве начальных данных из *k* элементов представляет собой величину $O(k\log_2 k)$. Паретовский слой с номером l представляет собой совокупность паретовских элементов на той части множества начальных данных, которая остается после удаления элементов, принадлежащих всем предыдущим слоям. Очевидно, что число элементов начальных данных, используемое для построения очередного паретовского слоя, уменьшается с увеличением его номера. Тогда данная оценка справедлива для алгоритма формирования любого паретовского слоя. Пусть *k* – число элементов в множестве *R* . Максимальное число паретовских слоев, формируемое в любой вершине графа, не превосходит величины *k*. Справедливость этого факта следует из того, что любой паретовской слой может состоять из единственного элемента, который доминирует все остальные элементы соответствующего набора начальных данных и, кроме того, в вершинах графа рассматриваются различные подмножества *R*, общее число элементов которых не превышает величины *k*. Следовательно, общая оценка алгоритма построения оптимального подмножества *Q* имеет вид $O(k^2 \log_2 k)$.

Пусть условия формирования решения задачи о ранце из элементов первых паретовских слоев множества P не выполняется. Предположим далее, что не все подмножество Q, а только некоторая его часть может быть сформирована из элементов первых паретовских слоев. Тогда для окончательного построения Q требуется решить подзадачу о ранце с измененным значением величины T, и все элементы, представляющие собой решение этой подзадачи принадлежат одному или нескольким последующим паретовским слоям. Такая же структура оптимального подмножества будет верна и в общем случае, когда на множестве P не выполняется условия формирования, частичного или полного, подмножества Q из элементов первых паретовских слоев. Все элементы Q, в частности, могут принадлежать множеству Парето на множестве P.

Таким образом, предложена следующая двухэтапная схема локализации элементов оптимального подмножества Q на множестве начальных данных R:

– поиск решения задачи о ранце в «отрицательной» формулировке на основе построения паретовских слоев в заданном двухкритериальном пространстве;

– рассмотрение на множестве P для построения оптимального подмножества Q только элементов множества Парето либо одного или нескольких соседних паретовских слоев.

Это позволяет в значительной степени уменьшить количество элементов начального множества R, требуемых для формирования оптимального подмножества Q. Для решения задачи о ранце на этом локализованном наборе начальных данных можно применить любой из известных алгоритмов. Далее предложен способ формирования оптимального подмножества Q из элементов множества Парето, основанный на свойстве упорядочивания его элементов в двухкритериальном пространстве.

Построение оптимального подмножества из элементов множества Парето

Пусть известно, что все элементы оптимального подмножества принадлежат множеству Парето на множестве P. Расположим элементы множества Парето по убыванию предпочтения значения критерия вероятности. Первый элемент A_1 будет иметь наибольшую вероятность и по свойству упорядочивания элементов паретовских множеств его второй критерий имеет наихудшее, максимальное, время выполнения. Ценность второго критерия возрастает с уменьшением времени выполнения. Следовательно, время выполнения каждого следующего элемента в данной упорядоченной последовательности будет меньше предыдущего. Поскольку требуется найти подмножество с максимальной суммарной вероятностью, то первые n элементов A_1, A_2, ... A_n, имеющие наибольшее значение вероятности, последовательно включаем в формируемое допустимое подмножество G до тех пор, пока сумма их времени выполнения не станет больше заданной величины T. Подмножество всех оставшихся элементов последовательности $h_j, j = n+1,....,r,$ где r – число элементов в множестве Парето, обозначим через D.

Проводим далее корректировку подмножества G элементами из D в направлении увеличения его суммарной вероятности. Рассмотрение элементов подмножества G для возможной их замены начинаем с последнего элемента A_n. Пусть O – его время выполнения, а H – вероятность достижения цели. Сформулируем подзадачу построения оптимального замещающего подмножества для элемента из G. Подмножество Z, включающее в себя элементы из D, назовем замещающим, если сумма времени выполнения всех его элементов не больше граничной величины O, а их сумма по вероятности больше величины H. Среди всех замещающих подмножеств требуется найти подмножество $Z_{\max}$ с максимальной суммарной вероятностью. После замены элемента A_n подмножеством $Z_{\max}$ новое подмножество будет иметь суммарное значение вероятности больше, чем G, оставаясь при этом допустимым для основной задачи.

Пусть x_j и q_j – вероятность и время выполнения элементов h_j из D. Для каждого h_j, $j = r, r - 1, \ldots, n + 1$ вычислим величины S_j и V_j , представляющие собой, соответственно, суммы всех x_i и q_i , $i = r, r - 1, \ldots, j$.

Утверждение 1. Пусть h_m, $r \geq m \geq n+1$, первый по упорядоченности элемент из D, чье время выполнения меньше либо равно граничной величине O некоторой подзадачи, и величина

S_m этого элемента меньше либо равна H. Тогда замещающее подмножество на множестве D с такими граничными величинами не может быть построено.

Доказательство. Из упорядоченности элементов подмножества D по уменьшению времени их выполнения следует, что все элементы с номерами, меньшими, чем номер m, имеют время выполнения, больше величины O, и не могут войти в замещающее подмножество. Справедливо соотношение $S_m > S_{m+1} > S_{m+2} > \ldots S_r$. По условию $H \geq S_m$. Поскольку замещающее подмножество может содержать только элементы из D с номерами, большими либо равными m, то его построение для заданных значений граничных величин невозможно.

Для построения оптимального подмножества Q требуется рассмотреть в качестве порождающих соответствующие подзадачи построения замещающих подмножеств как отдельные элементы G, так и их подмножества. Покажем, что существует порядок их рассмотрения, позволяющий в определенной степени сократить количество рассматриваемых подзадач, необходимых для формирования Q. Возьмем любое подмножество элементов из G. Порожденная им подзадача имеет граничные величины по времени и вероятности равные сумме значений соответствующих координат элементов, составляющих данное подмножество.

Утверждение 2. Пусть величина S_{n+1} меньше вероятности последнего элемента A_n из G. Тогда допустимое подмножество G представляет собой оптимальное подмножество Q.

Доказательство. Величина S_{n+1} представляет собой сумму по вероятности всех элементов D и по условию ее значение меньше вероятности элемента A_n. Исходя из упорядоченности по убыванию критерия вероятности элементов подмножества G, величина S_{n+1} будет меньше значения вероятности любого элемента из G, а, следовательно, меньше суммарной вероятности любого подмножества G. Тогда никакое замещающее подмножество из элементов D не может быть построено, и G представляет собой требуемое оптимальное подмножество.

Следствие 1. Пусть существует число u, меньше n , такое, что S_{n+1} меньше значения вероятности элемента A_u. Тогда подзадачи для всех подмножеств, составленных из элементов A_i, $i = 1,\ldots,u$, из G не имеют решения.

Следствие 2. Пусть существует такое минимально возможное число $1 < k < n$, такое, что величина S_{n+1} меньше суммарной вероятности всех подмножеств G, содержащих k элементов. Тогда подмножества с мощностью больше, чем k, нет смысла рассматривать с целью формулирования новых подзадач построения замещающих подмножеств.

Определим порядок рассмотрения элементов подмножества G для их возможной корректировки. Сначала формулируются подзадачи нахождения замещающих подмножеств для каждого отдельного элемента из G. Далее, при необходимости, формулируем подзадачи для всех групп, содержащих два элемента из G, затем для групп из трех элементов и т.д. Такой порядок позволяет при выполнении определенных условий существенно сократить число возможных операций для построения оптимального подмножества Q.

Далее предлагается общая схема алгоритма подзадачи построения замещающих подмножеств для заданных значений граничных величин. Полагаем $i = 1$, $O_i = O$, $W_i = H$, $F_i = 0$.

1. Осуществляем поиск элемента K_i из D, время выполнения которого меньше либо равно O_i. Если такого элемента не существует, то переходим к пункту 3. Пусть требуемый K_i , равный некоторому h_{t_i} , определен, и $W_i \geq S_{t_i}$ Применяя утверждение 1, получаем, что формирование замещающего подмножества невозможно и переходим к пункту 3. Если $S_{t_i} > W_i$ и значение величины $O_i \geq V_{t_i}$, то включаем в Z все элементы h_j , $j = t_i,\ldots,r$, замещающее подмножество построено и переходим к пункту 3. Если $S_{t_i} > W_i$ и $V_{t_i} > O_i$, то переходим к пункту 2.

2. Включаем K_i в замещающее подмножество Z. Вычисляем $F_i = F_i + x_{t_i}$. Если $F_i > H$, то замещающее подмножество построено и переходим к пункту 3. Если $H \geq F_i$ и $q_{t_i} = O_i$, ,то ресурс времени исчерпан, замещающего подмножества не существует, и переходим к пункту 3.

Если $q_{t_i} < O_i$, то имеется возможность дальнейшего построения замещающего подмножества. Полагаем $i = i+1$. Находим величину оставшегося ресурса времени $O_i = (O_{i-1} - q_{t_i})$, вычисляем значение вероятности $W_i = H - F_{i-1}$ и переходим к пункту 1.

Отметим, что по построению $O_i < O_{i-1}$, и все элементы D упорядочены по уменьшению времени их выполнения. Следовательно, поиск в пункте 1 следующего элемента замещающего подмножества осуществляется только среди элементов с номерами большими, чем номер t_i.

3. Продолжаем формирование замещающих подмножеств рассматриваемой подзадачи следующим образом. Полагаем $i = i–1$. Возвращаемся к предыдущему элементу K_i замещающего подмножества Z и рассмотрим следующий за ним элемент Е с номером r_i . Если величина $S_{r_i} > W_i$, то полагаем элемент $K_i = E$ и для дальнейшего формирования замещающего подмножества переходим к пункту 2 . Если $S_{r_i} \le W_i$ то, применяя утверждение 1, получаем, что дальнейшее построение замещающего подмножества не имеет смысла , и переходим к элементу K_{i-1} из Z и т.д. Таким образом, формируется многоуровневая древовидная схема построения всех возможных замещающих подмножеств подзадачи с заданными граничными величинами.

Если хотя бы одно замещающее подмножество рассматриваемой подзадачи построено и, следовательно, можно определить подмножество Z_{max}, то заменяем элемент или группу элементов из G, породивших эту подзадачу, на элементы подмножества Z_{max}. Получаем новое допустимое подмножество G_t , t = 0, s , $G_0 = G$, где s – общее число подзадач, для которых существует хотя бы одно замещающее подмножество и соответствующее ему новое подмножество D_t. Сохраняем упорядоченность элементов подмножеств G_t и D_t по убыванию значения вероятности и времени их выполнения. Корректируем при необходимости величины S_j и V_j у некоторых элементов из D_t и формулируем новую подзадачу для последнего элемента подмножества G_t. Если не существует ни одного замещающего подмножества для заданных значений граничных величин, то формулируем новую подзадачу в соответствии с указанным ранее порядком рассмотрения элементов G_t. Полагаем $i = 1$, $O_i = O$, $W_i = H$, $F_i = 0$ и переходим к пункту 1.

При выполнении условий утверждения 2 полученное после последней корректировки допустимое подмножество G_t является искомым оптимальным подмножеством Q.

Общая схема решения задачи о нахождении оптимального подмножества с максимальной суммарной стоимостью на основе двухкритериальной математической модели может быть представлена следующим образом. Находим решение задачи о ранце в ее отрицательной формулировке как подмножество элементов начального множества, которые не могут быть включены в оптимальное подмножество. Если в результате нет возможности сформировать оптимальное подмножество, применяем алгоритм его построения из элементов паретовских множеств, основанный на упорядоченности их элементов по значениям критериев качества.

Применяемость предложенного метода решения задач о ранце зависит также и от конкретного типа задачи. Например, для рассматриваемой в [1] задаче о ранце нет смысла его использования, т.к. координата «стоимости» принимает два значения: 0 и 1, и разбиение множества начальных данных на большое число паретовских слоев не представляется возможным.

Двухкритериальная модель решения задачи о покрытии отрезка

Комбинаторная оптимизационная задача о покрытии отрезка [AB] формулируется следующим образом. Задано конечное множество L отрезков, входящих в отрезок [AB], где A и B действительные числа. Требуется определить оптимальное подмножество V из L , которое покрывает отрезок [AB] и содержит минимальное число элементов среди всех подмножеств, обладающих этим свойством. Пусть число начальных данных в множестве L достаточно велико. Задача о покрытии, также как и задача о ранце, принадлежит к типу NP-полных задач и получение точного решения при большом числе начальных данных представляет собой значительную проблему. Рассмотрим задачу о покрытии отрезка в отрицательной формулировке, т.е. как задачу поиска элементов множества L, которые по своей структуре не могут быть включены в оптимальное подмножество. Используем аппарат многокритериальной оптимизации для нахождения таких элементов начальных данных.

Для каждого элемента S'_i из L определим два критерия x_i и y_i. Первый критерий – расстояние от левой границы отрезка [AB] до левой границы данного элемента. Второй – расстояние от правой границы [AB] до правой границы элемента. Отношение предпочтения между отдельными элементами множества L в заданном двухкритериальном пространстве введем следующим образом. Будем считать, что ценность каждого критерия возрастает с уменьшением его значения. Тогда если величина одного из критериев элемента S'_1 меньше, а второго – хотя бы не больше значений соответствующих критериев элемента S'_2, то элемент S'_1 доминирует элемент S'_2 . Если величина одного из критериев S'_1 больше соответствующего критерия элемента S'_2 , а величина второго критерия меньше, то элементы S'_1 и S'_2 находятся в отношении Парето. Предположим, что на множестве L не существует совпадающих элементов.

Утверждение 3. Для того чтобы отрезок S'_2 полностью включался в некоторый другой отрезок S'_1 *из* L, необходимо и достаточно, чтобы S'_2 был доминируемым отрезком S'_1 на введенном двухкритериальном отношении предпочтения.

Доказательство. Пусть отрезок S'_2 полностью включается в отрезок S'_1 . По условию рассматриваемой задачи все отрезки из L полностью входят в отрезок $[AB]$ и на множестве L нет совпадающих элементов. Тогда расстояние хотя бы от одной границы отрезка S'_1 до соответствующей границы отрезка $[AB]$ должно быть меньше, а по второй границе – не больше, чем у отрезка S'_2. Это соответствует условию доминируемости S'_2 элементом S'_1 . Пусть отрезок S'_2 доминируется отрезком S'_1. Тогда значения их критериев в виде расстояния до соответствующих границ отрезка $[AB]$ связаны вышеуказанными соотношениями. Все отрезки из L входят в отрезок $[AB]$, и, доминируемый отрезок полностью включается в доминирующий.

По определению множества Парето на конечном множестве начальных данных для его построения требуется найти все доминируемые альтернативы. Из утверждения 3 получаем, что решение двухкритериальной задачи нахождения множества Парето на множестве начальных данных L с введенном отношением предпочтения представляет собой алгоритм нахождения отрезков, для которых существует хотя бы один отрезок из L полностью его содержащий.

Критериальные оценки отдельных элементов выражаются действительными числами. Отношение «больше» и «меньше» на множестве действительных чисел транзитивно. Тогда транзитивно и введенное двухкритериальное отношение предпочтения, т.е. выполняется соотношение: если элемент S'_1 доминирует S'_2, а элемент S'_2 доминирует элемент S'_3, то S'_1 доминирует S'_3. В [5] было показано, что задача нахождения множества Парето на конечном множестве начальных данных при транзитивности отношения предпочтения может быть решена на основе организации параллельных вычислений путем нахождения частичных решений на динамической многоуровневой графовой модели, где вершины представляют собой подмножества начальных данных. Определенные при формировании каждого отдельного частичного решения доминируемые элементы исключаем из дальнейшего рассмотрения.

Утверждение 4. Любые два отрезка, входящие в множество начальных данных L и находящиеся между собой в отношении Парето на введенном отношении предпочтения, не могут быть включены друг в друга.

Доказательство. По введенному отношению предпочтения между элементами из множества L у каждого отрезка, входящего в паретовское множество, расстояние от одной своей границы до соответствующей границы отрезка $[AB]$ меньше, а от второй границы – больше, чем у любого другого отрезка из этого же множества. По условию задачи все отрезки из L включаются в отрезок $[AB]$, из чего и следует справедливость данного утверждения.

Частичные решения представляют собой паретовские множества на подмножествах L. По утверждению 4 никакие два элемента из частичного решения не могут полностью включаться друг в друга. Однако элемент частичного решения может полностью покрываться некоторой группой отрезков из этого же множества и в этом случае также должен быть исключен из дальнейшего рассмотрения. Пусть построено некоторое частичное решение F. Упорядочим его элементы по убыванию предпочтения первого критерия – расстоянию от левого края отрезка. По свойству элементов паретовского множества в двухкритериальном пространстве по второму критерию – расстоянию от правого края отрезка эти же элементы будут упорядочены по возрастанию его предпочтения. Тогда первый элемент S_1 последовательности имеет наименьшее расстояние от левой границы отрезка $[AB]$ и наибольшее расстояние от правой границы.

Утверждение 5. Первый по порядку упорядочивания S'_1 и последний S'_m элементы множества F не могут покрываться никакой группой элементов из этого же множества.

Доказательство. Предположим противное, что, например, у S'_1 имеется покрывающая группа. Элемент S'_1 имеет наилучшее значение по первому критерию среди всех элементов паретовского множества. Тогда, по крайней мере, у одного отрезка S'_p из покрывающей группы с элементом S'_1 должно совпадать значение первого критерия. По утверждению 4 элементы паретовского множества не могут быть включены друг в друга. Тогда S'_1 и S'_p могут только совпадать между собой, но по сделанному ранее предположению на множестве L таких элементов не существует. Следовательно, второго элемента с таким значением первого критерия как у S'_1 во множестве Парето быть не может, тогда не может быть и покрывающей группы. Для элемента S'_m доказательство отсутствия покрывающей группы, аналогично, только рассматривается второй критерий, по которому S'_m имеет наилучшее значение.

Сформулируем утверждение, указывающее для любого элемента S'_k, $k = 2,\dots,m-1$, где m – число элементов в частичном решении, достаточные условия существования покрывающей группы. Пусть Y_j – величина расстояния от левой границе отрезка [AB] до правой границы некоторого отрезка S'_j из множества L. Поскольку все отрезки из L полностью включаются в отрезок [AB], то это расстояние представляет собой сумму значения первой координаты отрезка S'_j и его длины. Элементы множества F упорядочены по значению первого критерия. Предположим, в нем существует элемент S'_z с номером меньшем, чем номер элемента S'_k, который частично покрывает S'_k. Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 6. Если в F существует элемент S'_b с номером большим, чем номер S'_k, такой, что выполняется следующее условие: значение первой координаты элемента $S'_b < Y_z$,то S'_b покрывает оставшуюся часть S'_k и покрывающая группа для элемента S'_k состоит из двух элементов: S'_z *и* S'_b.

Доказательство. Выполнение условия $x_b < Y_z$ означает, что элементы S'_b и S'_z пересекаются между собой. По условию S'_b имеет больший номер, чем S'_z и эти два отрезка, как элементы паретовского множества, не могут включаться друг в друга. Тогда S'_b обязательно хотя бы частично покрывает отрезок S'_k. Элементы F упорядочены по возрастанию предпочтения второго критерия. Следовательно, вторая координата S'_b превосходит в смысле предпочтения, вторую координату S'_k. Это означает, что расстояние от правой границы отрезка S'_b до правой границы отрезка [AB] меньше этого же расстояния для отрезка S'_k. Тогда отрезок S'_b покрывает всю оставшуюся часть S'_k, и покрывающая группа для S'_k состоит из элементов S'_z и S'_b.

Используя утверждение 6, можно проверить возможность покрытия отдельных элементов частичного решения. Покрывающие группы должны содержать хотя бы один элемент с меньшим номером, чем покрываемый элемент. Все покрываемые отрезки, входящие в частичные решения на любом уровне параллельных вычислений, исключаем из рассмотрения.

Оптимальное подмножество V формируется только из элементов множества Парето. Число элементов множества Парето в случае двух критериев качества приблизительно равно величине $\sqrt{\pi k}$ [7]. Из этой оценки следует и возможная степень сокращения количества элементов, которые будут использованы для построения оптимального подмножества V.

ALGORITHM OF DECISION GIVEN COMBINATORIAL TASKS ON THE BASE OF MANY-CRITARIAL OPTIMIZATION MODEL

S.V. CHEBAKOV, L.V. SEREBRYANAYA

Abstract

The decision method of two combinatorial tasks about finding of optimum subset on the given set of initial data is offered. The task about knapsack and the task about length covering are founded on use the mathematical formulas of many-critarial optimization. In developed algorithms is executed searching of pareto elements in the defined two-criterial space.

Список литературы

1. *Пападимитриу Х.Х.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М., 1985.
2. *Еремеев А.В., Заозерская Л.А., Колоколов А.А.* // Дискретный анализ и исследование операций. 2007. Сер. 2, Т. 7, № 2. С. 22–46.
3. *Закревский А.Д.* Логический анализ каскадных схем. М., 1981.
4. *Чебаков С.В.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2005. № 2. С. 112–118.
5. *Чебаков С.В.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 105–113.
6. *Kung H.F., Preparata F.P.* // J. of the Association for Computing Machinery. 1975. Vol. 22. P. 469–476.
7. *Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н.* Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М., 1986.