

## СИНХРОНИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ МУЛЬТИПЛЕКСИРОВАНИЯ С ОРТОГОНАЛЬНЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ЧАСТОТ

Р.А. ЖЕРНОСЕКОВ, В.Т. ПЕРШИН

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Республика Беларусь*

*Поступила в редакцию 20 января 2017*

**Аннотация.** В работе изложены результаты исследования синхронизации системы OFDM путем использования одного из основных свойств непрерывного преобразования Фурье, характеризующегося дуальностью между сверткой во временной области и перемножением в частотной области, которая не полностью распространяется на дискретный случай. Для его корректного применения к дискретным конструкциям системы OFDM линейная свертка отсчетов заменена круговой сверткой. Такой подход к анализу синхронизации снижает вычислительную сложность его проведения и не требует формирования тренировочных последовательностей либо пилотных данных. В результате получена матрица, учитывающая отклонения анализируемых отсчетов в виде случайных гауссовских процессов с нулевым средним значением, позволяющая оценить амплитуды поднесущих при произвольном уровне дисперсии случайных процессов.

**Ключевые слова:** синхронизация, ортогональный, частота, разделение, мультиплексирование, система, демодуляция, ошибка, поднесущая.

**Abstract.** The results presented research OFDM system synchronization by using one of the basic properties of the continuous Fourier transform, characterized by the duality between a convolution in the time domain, and multiplying the frequency domain, which is not fully extended to the discrete case. For its correct application to the digital system design OFDM linear convolution sampling replaced the circular convolution. This approach reduces the computational analysis synchronization of its complexity and requires the formation of training sequences or pilot data. The result is a matrix that takes into account the deviation of the analyzed samples in the form of random Gaussian processes with zero mean value, allowing to estimate the amplitude of the subcarriers for an arbitrary level of dispersion of random processes.

**Keywords:** synchronization, orthogonal, frequency, division, multiplexing, system, demodulation, error, subcarrier.

**Doklady BGUIR. 2017, Vol. 106, No. 4, pp. 5–11**  
**The synchronization of the orthogonal frequency division multiplexing system**  
**R.A. Zhernosekov, V.T. Pershin**

### Введение

Система мультиплексирования с ортогональным разделением частот (Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OFDM) – это система модуляции четвертого поколения (4G), которая, как ожидается, будет принята в качестве стандарта для цифрового телевидения в Европейских странах, Японии и Австралии. Эта система первоначально рекомендовалась как технология для использования в локальных сетях и в настоящее время развивается, чтобы обеспечить мобильность беспроводных технологий, основанных на OFDM, для сотовых систем организации Интернет-услуг, как это делается в развитии долговременной эволюции (Long Term Evolution, LTE).

Система OFDM превосходно работает в среде мобильного приема и обладает хорошей эффективностью использования полосы частот. Однако в системе OFDM ортогональные друг

другу поднесущие расположены плотно с небольшими интервалами между поднесущими. Поэтому система OFDM оказывается менее надежной в отношении частотного сдвига по сравнению с системой одночастотной поднесущей, которая введена в LTE, как новая схема передачи SC-FDMA (множественного доступа с частотным разделением каналов и одной несущей). При этом отношение пиковой мощности к средней мощности передаваемого сигнала у систем OFDM выше, чем у систем с единственной несущей, что представляет серьезную проблему, когда используются нелинейные усилители в выходных каскадах передатчиков [1, 2].

Системы OFDM очень чувствительны к несовершенству синхронизации приемника с передатчиком. Отсечка несущей частоты и временной джиттер символов разрушают ортогональность поднесущих, что проявляется в значительном ухудшении выполнения системы из-за возникновения интерференции между последовательными символами и соседними поднесущими [3, 4]. В данной работе изложены результаты исследования синхронизации системы OFDM путем использования одного из основных свойств непрерывного преобразования Фурье, характеризующегося дуальностью между сверткой во временной области и перемножением в частотной области, которая не полностью распространяется на дискретный случай. Для его корректного применения к дискретным конструкциям системы OFDM линейная свертка отсчетов заменена круговой сверткой. Такой подход к анализу синхронизации снижает вычислительную сложность его проведения и не требует формирования тренировочных последовательностей либо пилотных данных. В результате получена матрица, учитывающая отклонения анализируемых отсчетов в виде случайных гауссовых процессов с нулевым средним значением, позволяющая оценить амплитуды поднесущих при произвольном уровне дисперсии случайных процессов.

### **Синхронизация в частотной и временной областях в системе OFDM**

Система OFDM предлагает много преимуществ своего использования, однако для их реализации необходимо, чтобы система OFDM работала корректно и чтобы синхронизация OFDM сигналов был эффективной. Рассмотрим работу системы синхронизации, исследуя ее работу в частотной области, когда частоты поднесущих должны с высокой точностью соответствовать сохранению ортогональности, и во временной области, когда точность временных интервалов обеспечивают условия, при которых сохраняется точность синхронизированных отсчетов и реализована минимизация ошибок данных. Для обеспечения оптимальности работы системы OFDM необходимо добиться выполнения условий, при которых синхронизация системы OFDM выполняется внутри требуемых пределов.

В частности, важно, чтобы выполнение демодуляции в приемнике системы OFDM гарантировало надежную синхронизацию точно с поднесущими частотами. Временная отсечка может возникать по многим причинам, включая появление ошибок передачи информации между приемником и передатчиком, а также результаты допплеровского смещения при изменении расстояния между приемником и передатчиком во время передачи информации. Если частотная синхронизация нарушается, тогда ортогональность поднесущих ухудшается в процессе демодуляции и скорость ошибок возрастает. Так как при демодуляции имеем дело с дискретизацией, то при синхронизации все вклады от других поднесущих должны стремиться к нулевой сумме, как это показано на рис. 1 цифрой 1. В этом случае все поднесущие ортогональны и скорость ошибок минимальна. Цифрой 2 на этом рисунке обозначен отсчет первой поднесущей. В ситуации же, когда OFDM синхронизация в частотной области рассмотрения является плохой, демодулятор смешает свои отсчеты относительно пикового значения, и точки, в которых суммируются вклады от других поднесущих, уже не будут соответствовать созданию нулевой суммы, как это показано на рис. 2 цифрой 1. Цифрой 2 на этом рисунке обозначен отсчет первой поднесущей. Распределение поднесущих частот, используемое в приемнике для отсчетов принятого сигнала, определяется внутренней скоростью обработки данных. Если эта скорость отличается от используемого в передатчике распределения поднесущих частот, то будет установлено, что даже если первая поднесущая внутри мультиплекса является правильной, тогда будет увеличиваться несоответствие с каждой поднесущей по мере увеличения ее расстояния от первой поднесущей. Даже при

малом уровне несоответствия будет происходить увеличение скорости ошибок, как это видно из рис. 2, на котором круглыми точками показаны координаты пересечений отсчетов с распределением поднесущих в передатчике.

### Структура принимаемого сигнала

На приемном конце канала связи система OFDM имеет приемник, в котором частотные отсчеты сигнала с OFDM преобразуются во временные отсчеты в результате использования обратного преобразования Фурье, представляя выходные временные отсчеты следующим образом:  $s_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} s_k e^{i2\pi nk/N}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Сгенерированные одновременно временные отсчеты затем превращаются в последовательный поток с помощью параллельно-последовательного преобразователя. Последний этап требует перед передачей потока по каналу связи добавить код циклического префикса. Действительно, одно из основных свойств непрерывного преобразования Фурье – это дуальность между сверткой во временной области и перемножением в частотной области. Это свойство не полностью распространяется на дискретный случай. Для того, чтобы его можно было корректно применять, он должен характеризоваться круговой сверткой вместо более общей линейной свертки во временной области. Поэтому допустим, что последовательность импульсных отсчетов дискретного канала имеет длину  $k$  импульсов.

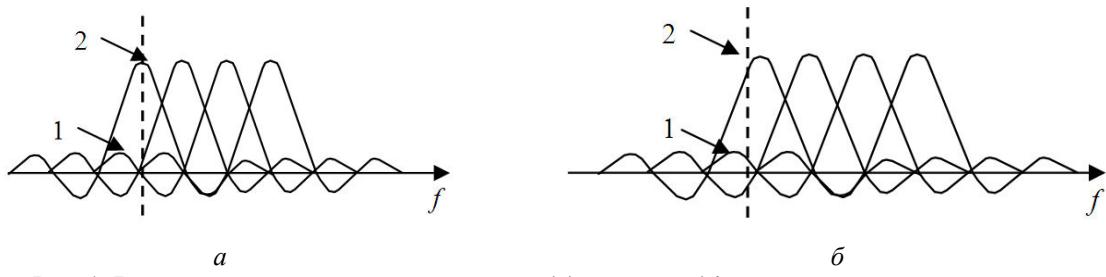


Рис. 1. Выполнение демодуляции с хорошей (а) и плохой (б) частотной синхронизацией

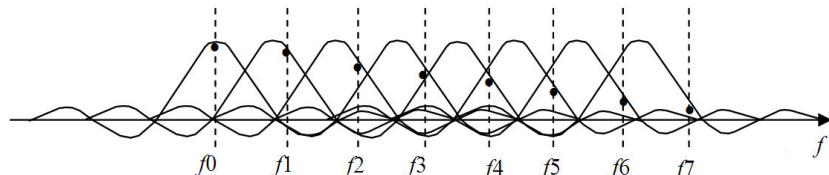


Рис. 2. Синхронизация системы OFDM во временной области

Добавляя циклический префикс, соответствующий прибавлению последних  $k$  символов к началу каждого блока  $[s_0, s_1, \dots, s_N]$ , получим следующую структуру блока:  $[s_{N-k}, s_{N-k-1}, \dots, s_0, s_1, \dots, s_N]$ . Эта операция сохраняет свойство перемножения в частотной области. Результирующая последовательность проходит через цифро-аналоговый преобразователь и затем преобразуется в высокочастотную поднесущую. Сформированный таким образом сигнал поступает в канал связи.

На приемной стороне шум, обусловленный влиянием канала, накладывается на принятый сигнал. Этот сигнал сначала преобразуется в baseband-сигнал и затем проходит через фильтр низких частот (ФНЧ), предназначенный для устранения высокочастотных составляющих сигнала, поступившего на вход фильтра. Временные отсчеты восстанавливаются в результате прохождения результирующего сигнала через АЦП. Циклический префикс устраняется из каждого потока, и затем этот поток преобразуется в параллельный поток с помощью последовательно-параллельного преобразователя. Выполняется быстрое преобразование Фурье, чтобы восстановить исходные коэффициенты. Все это выполняется в последовательном потоке, чтобы сформировать символы, которые были переданы передатчиком. Как можно видеть из рис. 1, система OFDM обеспечивает наилучшее использование полосы частот, располагаемой системой.

## Оптимальное и неоптимальное расположение поднесущих

Как временная, так и частотная синхронизация влияют на качество выполнения системы с OFDM. Разбиение исходных символов на  $N$  параллельных символов приводит к увеличению длительности символов. В результате этого снижается чувствительность системы к временной отсечке. Однако частотная отсечка может существенно искажить представление сигнала в частотной области.

Символ во временной области, когда передается по каналу, можно представить в виде OFDM символа следующим образом:  $s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k e^{j2\pi(f_0+k\Delta f)t} \text{rect}\left(\frac{t}{NT_s}\right)$ , где  $s_k$  – комплексная амплитуда  $k$ -й поднесущей;  $\Delta f$  – интервал между поднесущими;  $f_0$  – частота нулевой поднесущей. Перемножение с оконной функцией объясняется тем, что каждый OFDM символ ограничен во времени длительностью  $T_s$ .

Рассчитаем преобразование Фурье вышеупомянутого временного сигнала и получим

$$S(f) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \sin c(NT_s f) \cdot \delta(f - (f_0 + k\Delta f)).$$

Видим, что общая полоса частот равна  $N\Delta f$  и время  $T_s$  символа равно  $1/N\Delta f$ . Заменяя  $NT_s$  выражением  $1/\Delta f$ , получим  $S(f) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \sin c \frac{f - f_0 - k\Delta f}{\Delta f}$ . Может случиться, что на стороне

демодулятора поднесущие получат сдвиг  $df$ . Это можно видеть из рис. 3. На этих рисунках показаны 4 поднесущих, и символы на 4-х различных кривых соответствуют различным вкладам каждой поднесущей в результат суммирования сигнала в отсчетных точках. Конфигурация, приведенная на рис. 3, *a*, является оптимальной, так как на нем представлена нулевая отсечка между частотами локальных осцилляторов в приемнике и передатчике. Однако на рис. 3, *b* вводится ненулевая отсечка  $df$ , что приводит к интерференции поднесущих. Величина сдвига  $df$  может быть целым кратным интервалу между поднесущими  $\Delta f$ , когда конфигурация будет похожа на ту, что приведена на рис. 3, *a*. Однако, символы принятых данных могут оказаться в ошибочной позиции, которая введет битовую ошибку. Как видно из рис. 3, *b*, ортогональность между поднесущими все же сохраняется. Действительно, спектр можно представить как  $S(f) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \frac{f + C\Delta f - f_0 - k\Delta f}{\Delta f}$ , где  $C$  – целочисленная константа.

Таким образом, такой сдвиг не влияет на положение точек пересечения, принадлежащих функции  $\sin c$ , с кривой, описывающей огибающую спектра OFDM символа, и ортогональность поднесущих сохраняется.

Если сдвиг определяется не целочисленным кратным коэффициентом интервала между поднесущими, тогда нужно рассмотреть интерференцию различных поднесущих. Это можно сделать следующим образом:  $I_l = \sum_{k=0, k \neq l}^{N-1} s_k \sin c \frac{df + (l-k)\Delta f}{\Delta f}$ .

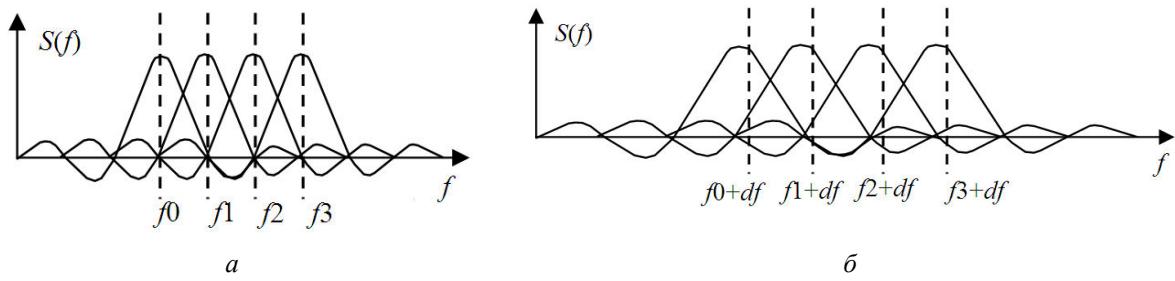


Рис. 3. Оптимальное (*a*) и неоптимальное (*b*) расположение поднесущих в спектре OFDM сигнала

Записанное выражение представляет величину вклада других поднесущих, связанных с  $l$ -й поднесущей. Таким образом, величина  $I_l$  получается в результате оценки  $S(f)$  на частоте,

связанной с  $l$ -й поднесущей. Если сдвиг является нулевым или целым кратным интервалу между поднесущими, оценка вышеупомянутого значения будет равна нулю. Ненулевая величина для  $I_l$  может быть интерпретирована, как потери ортогональности базисных функций. В этом смысле интерференция между поднесущими рассматривается как воздействие, приводящее к потере ортогональности. Более подробно этот эффект рассмотрим в контексте фазового шума.

### Фазовый шум в системе OFDM

Сигналы обычно передаются излучением радиочастот, которые несовместимы с областью частот, на которых работают модуляторы и демодуляторы. Действительно, последние работают на более низких частотах, относящихся к классу промежуточных. Преобразуя частоты радиодиапазона в промежуточные, получают сигнал, предназначенный для демодуляции. Такое преобразование выполняется с помощью локального осциллятора, который характеризуется вредным эффектом, при проявлении которого вводится шум, накладывающийся на принятый сигнал. Этот шум вызывается случайными вариациями фазы вблизи стационарного положения генерируемого осциллятором синусоидального сигнала. Будем считать, что переданный OFDM сигнал имеет ту же самую форму, какая уже упоминалась, и имеет вид  $s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k e^{i2\pi(f_0+k\Delta f)t}$ . В идеальных условиях, если локальный осциллятор не создает никакого дополнительного шума, принятый сигнал имеет форму, которую можно описать выражением  $r(t) = \sum_{k=0}^{N-1} H_k s_k e^{i2\pi(f_0+k\Delta f)t}$ , где  $H_k$  обозначает комплексный частотный отклик канала с  $k$ -й поднесущей.

Если локальный осциллятор является неидеальным, нужно принять в расчет влияние шума. Последний моделируется как случайный процесс, и его можно обозначить как  $e^{i\phi(t)}$ . Для принятого сигнала в этом случае получим  $r(t) = \sum_{k=0}^{N-1} R_k e^{i2\pi(f_0+k\Delta f)t} e^{i\phi(t)}$ , где  $R_k = H_k s_k$ .

На приемном конце канала связи принятый сигнал проектируется на одну из возможных поднесущих. Определить амплитуды демодулированных сигналов можно следующим образом:

$$A_l = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} r(t) e^{-i2\pi(f_0+l\Delta f)t} dt = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} e^{i\phi(t)} \sum_{k=0}^{N-1} R_k(t) e^{-i2\pi(k-l)\Delta f} dt, \quad (1)$$

где  $T_s$  определяет время символа OFDM, которое равно  $1/N\Delta f$ , а  $N$  равно числу всех поднесущих.

В практических устройствах интегрирование, представленное выражением (1), заменяется суммированием, хотя можно использовать и интегрирование, так как оно делает источник ближе интуитивному восприятию, даже когда ничего не излучается, если интегрирование заменить суммированием. Выражение (1) означает проекцию принятого сигнала на форму колебания, связанного с поднесущей  $2\pi f_l = 2\pi f_0 + 2\pi l\Delta f$ . Возмущение вводится случайным процессом  $\phi(t)$ , который принимается относительно незначительным по сравнению с анализируемым входным сигналом, так что предполагается справедливым следующее приближение:  $e^{i\phi(t)} = \cos \phi(t) + i \sin \phi(t) \approx 1 + i\phi(t)$ . Теперь выражение для  $A_l$  можно записать следующим образом:

$$A_l = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} (1 + i\phi(t)) \sum_{k=0}^{N-1} R_k e^{i2\pi(k-l)\Delta f} dt = \frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^{N-1} R_k \int_0^{T_s} e^{i2\pi(k-l)\Delta f} dt + \frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^{N-1} R_k \int_0^{T_s} i\phi(t) e^{i2\pi(k-l)\Delta f} dt. \quad (2)$$

Второе слагаемое в (2) обозначим  $B_l$ . Разделение выражения (2) на две части отражает факт, что первое слагаемое представляет собой принятый сигнал в отсутствие шума, в то время как второе слагаемое соответствует учету шумовой составляющей принятого сигнала.

Для второго слагаемого  $B_l = \frac{1}{T_s} \sum_{k=0}^{N-1} R_k \int_0^{T_s} i\phi(t) e^{i2\pi(k-l)\Delta f} dt$  можно записать

$$B_l = \frac{1}{T_s} \sum_{k=0, k \neq l}^{N-1} R_k \int_0^{T_s} i\phi(t) e^{i2\pi(k-l)\Delta f} dt + \frac{R_l}{T_s} \int_0^{T_s} i\phi(t) dt. \quad (3)$$

Второе слагаемое выражения (3) представляет вклад  $l$ -й поднесущей в общую сумму воздействия входного сигнала, и это то, чего следовало ожидать при проектировании принятого сигнала на колебание, связанное с  $l$ -й поднесущей. Такой подход позволяет оценить величину  $i\phi_0 R_l$ , где  $\phi_0$  соответствует действительной составляющей, какая устанавливается в результате выполнения операции интегрирования. Видим, что константа  $\phi_0$  не зависит от номера поднесущей  $l$ , и это положение распространяется на все символы сигнального созвездия. Можно отнести эту величину к общей фазовой ошибке, которая прямо пропорциональна амплитуде  $R_l$  принятого сигнала  $l$ -й поднесущей. Приходим к выводу, что физический смысл этого вклада представляет собой поворот сигнального созвездия на угол,

равный  $\phi_0 = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} i\phi(t) dt$ . Обобщая, определим величину  $\phi_m$  как  $\phi_m = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \phi(t) e^{im\Delta f} dt$ . Учесть

влияние шума теперь можно с помощью следующей матрицы:

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{N-2} \\ A_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_{N-2} & \phi_{N-1} \\ \phi_{-1} & \phi_0 & \phi_1 & \dots & \phi_{N-3} & \phi_{N-2} \\ \phi_{-2} & \phi_1 & \phi_0 & \dots & \phi_{N-4} & \phi_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \phi_{-(N-2)} & \phi_{-(N-3)} & \phi_{-(N-4)} & \dots & \phi_0 & \phi_1 \\ \phi_{-(N-1)} & \phi_{-(N-2)} & \phi_{-(N-1)} & \dots & \phi_{-1} & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ R_{N-2} \\ R_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Диагональ матрицы (4) является постоянной, так как эти элементы составляют общую фазовую ошибку, которая является одинаковой для всех поднесущих. Элементы, стоящие вне диагонали матрицы, являются взвешивающими коэффициентами, которые перемножаются с каждой комплексной амплитудой принятых сигналов. Структура интерференции между поднесущими, таким образом, четко просматривается из матрицы (4). Результаты расчета амплитуды  $A_2$ , формирование которой осуществляется в условиях хорошей и плохой синхронизации с учетом влияния более 60 поднесущих, приведены на рис. 4.

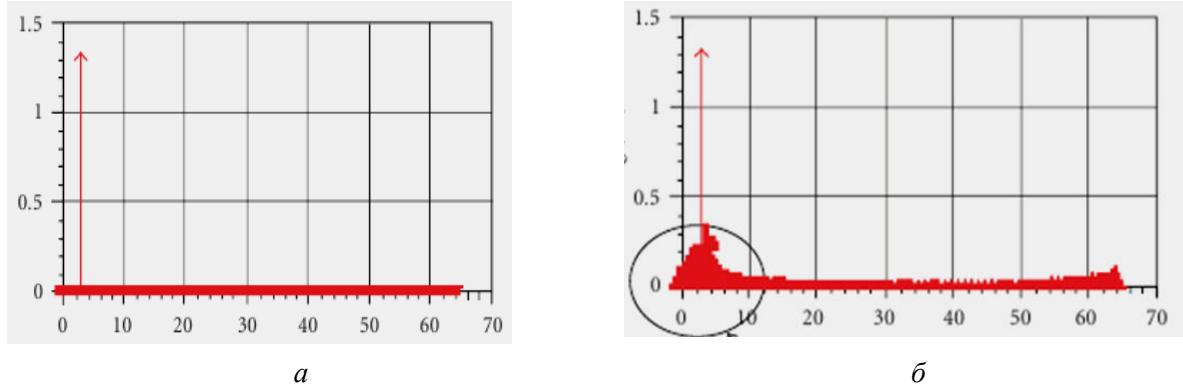


Рис. 4. Амплитуды поднесущей  $A_2$  при хорошей (а) и плохой (б) синхронизации

### Заключение

Результаты расчета подтверждают справедливость выполненного теоретического анализа синхронизации системы OFDM, рассмотренной как в частотной, так и во временной областях. Получено приемлемое подтверждение формирования вклада поднесущих (они попадают внутрь овала на рис. 4, б) в общую сумму при нарушении ортогональности

поднесущих, отражающим наибольшее влияние соседних спектральных составляющих OFDM сигнала по сравнению с влиянием отдаленных поднесущих, номера которых превышают 10. Такой подход к анализу синхронизации снижает вычислительную сложность его проведения и не требует формирования тренировочных последовательностей или пилотных данных.

### **Список литературы / References**

1. Peled A., Ruiz A. Frequency Domain Data Transmission using Reduced Computational Complexity Algorithms // Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. 1980. Vol. 5. P. 964–967.
2. Reader D. Blind Maximum Likelihood Sequence Detection over Fast Fading Communication Channels. Australia: University of South Australia, 1996.
3. Barhumi I., Leus G., Moonen M. Optimal Training Design for MIMO OFDM Systems in Mobile Wireless Channels // IEEE Trans. on Signal Processing. 2003. Vol. 51. P. 1615–1624.
4. Morelli M., Mengali U. A Comparison of Pilot-aided Channel Estimation Methods for OFDM Systems // IEEE Trans. on Signal Processing. 2001. Vol. 49. P. 3065–3073.

### **Сведения об авторах**

Жерносеков Р.А., магистрант кафедры информационных радиотехнологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Першин В.Т., к.т.н., доцент, доцент кафедры информационных радиотехнологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

### **Адрес для корреспонденции**

210032, Республика Беларусь,  
г. Витебск, ул. Чкалова, 32/4, 27  
тел. +375-29-513-75-67;  
e-mail: ew6tt@yandex.ru;  
Жерносеков Роман Александрович

### **Information about the authors**

Zhernosekov R.A., master student of information radiotechnology department of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

Pershin V.T., PhD, associate professor, associate professor of information radiotechnology department of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

### **Address for correspondence**

210032, Republic of Belarus,  
Vitebsk, Chkalova str., 32/4, 27  
tel. +375-29-513-75-67;  
e-mail: ew6tt@yandex.ru;  
Zhernosekov Roman Alexandrovich