



Оценка радиальной скорости, полученная по результатам восстановления однозначной частоты Доплера, является достоверной. При этом влияние оценок угла места и азимута на результаты оценок вектора состояния не рассматривается.

Вызывает определенный интерес анализ влияния оценок радиальной скорости на точность фильтрации по конечной выборке вектора состояния  $\mathbf{a}$ , включающего в себя полярную координату  $r$ , а также ее первую и вторую производные  $\mathbf{a} = \|r \ V_r \ a_r\|^T$ . Влияние оценок  $V_r$  на результат фильтрации оценивается по результатам математического моделирования.

### Синтез алгоритма фильтрации дальности и радиальной скорости по конечной выборке

В [1] приведено векторно-матричная форма уравнения фильтрации в общем случае, определяющая результирующую оценку вектора состояния  $\hat{\mathbf{a}}_k$  и результирующую матрицу точности его оценки  $\mathbf{Q}_k$  на момент окончания выборки  $t_k$ :

$$\hat{\mathbf{a}}_k = \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{Q}_{0k} \hat{\Theta}_k, \quad (1)$$

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{R}_k^{-1} = \mathbf{H}_k^T \mathbf{Q}_{0k} \mathbf{H}_k, \quad (2)$$

где  $\mathbf{R}_k$  – корреляционная матрица ошибок;  $\mathbf{H}_k$  – статическая матрица пересчета;  $\mathbf{Q}_{0k}$  – матрица точности наблюдения;  $\mathbf{Q}_k$  – результирующая матрица точности вектора состояния.

Для определения матрицы  $\mathbf{H}_k$  использована вектор-функция  $\mathbf{h}$ , определяющая уравнение преобразования вектора наблюдения  $\hat{\Theta}_k$  в элементы вектора состояния  $\hat{\mathbf{a}}_k$  на  $k$ -м шаге:

$$\Theta_k = \mathbf{h}(\mathbf{a}_k) = \begin{pmatrix} \alpha(t_k) - \dot{\alpha}(t_k)\Delta t(k-1) + \ddot{\alpha}(t_k)\Delta t^2(k-1)^2/2 \\ \vdots \\ \alpha(t_k) - \dot{\alpha}(t_k)\Delta t(k-k) + \ddot{\alpha}(t_k)\Delta t^2(k-k)^2/2 \\ \dot{\alpha}(t_k) - \ddot{\alpha}(t_k)\Delta t(k-1) \\ \vdots \\ \dot{\alpha}(t_k) - \ddot{\alpha}(t_k)\Delta t(k-k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{r}_f(t_1) \\ \vdots \\ \hat{r}_f(t_k) \\ \hat{V}_{rf}(t_1) \\ \vdots \\ \hat{V}_{rf}(t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{r}_{f1} \\ \vdots \\ \hat{r}_{fk} \\ \hat{V}_{rf1} \\ \vdots \\ \hat{V}_{rfk} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В этом случае статическая матрица пересчета  $\mathbf{H}$  определена следующим выражением:

$$\mathbf{H}_k = \left\| H_{i,j} \right\| = \left\| \frac{\partial h_i(\mathbf{a})}{\partial \alpha_j} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t(k-1) & \Delta t^2(k-1)^2/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -\Delta t(k-k) & \Delta t^2(k-k)^2/2 \\ 0 & 1 & -\Delta t(k-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & -\Delta t(k-k) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Матрица точности разового оценивания  $\mathbf{Q}_{fk}$  (размерностью  $2k \times 2k$ ) в силу независимости разовых оценок параметров имеет диагональный вид и характеризуется элементами:

$$Q_{fk_{i,i}} = 1/D_{fr} \text{ для } i = \overline{1, k} \text{ и } Q_{fk_{j,j}} = 1/D_{fv_r} \text{ для } j = \overline{k+1, 2k}. \quad (5)$$

В общем случае, на  $k$ -м шаге матрица точности фильтрации с учетом факторизации сумм, представляющих собой арифметические прогрессии, может быть представлена в виде:

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{R}_k^{-1} = \frac{\Delta t^2}{D_r} \begin{vmatrix} k / D_{fr} & -\frac{\sum_{i=1}^k \Delta}{\Delta t} & \frac{\sum_{i=1}^k \Delta^2}{\Delta t} \\ -\frac{\sum_{i=1}^k \Delta}{\Delta t} & \sum_{i=1}^k \Delta^2 + k C_0 & -\frac{\Delta t \sum_{i=1}^k \Delta^3}{2} - \Delta t C_0 \sum_{i=1}^k \Delta \\ \frac{\sum_{i=1}^k \Delta^2}{\Delta t} & -\frac{\Delta t \sum_{i=1}^k \Delta^3}{2} - \Delta t C_0 \sum_{i=1}^k \Delta & \frac{\Delta t^2 \sum_{i=1}^k \Delta^4}{4} + \Delta t^2 C_0 \sum_{i=1}^k \Delta^2 \end{vmatrix}, \quad (6)$$

где  $\sum_{i=0}^k (k-i)^n = \sum_{i=1}^k \Delta^n$ ;  $i$  – номер текущего шага разового оценивания;  $k$  – число шагов оценивания параметров;  $D_{fr} / (\Delta t^2 \cdot D_{fr}) = C_0$  – коэффициент, пропорциональный отношению дисперсий ошибки измерения дальности и радиальной скорости за время обзора в квадрате [1–3].

Элементы корреляционной матрицы ошибок фильтрации  $\mathbf{R}_k$  по конечной выборке за  $k$  шагов измерений соответственно равны:

$$R_{11} = \frac{3 \left[ (k^2 - 1)(k - 2)(3k^2 - 3k + 2) + 8C_0(13k^3 - 17k^2 + 8k - 7) + 240C_0^2(k + 1) \right]}{k(k + 1)(12C_0 + k^2 - 1)(60C_0 + k^2 - 4)} D_{fr} - \quad (7)$$

дисперсия ошибки фильтрации радиальной дальности;

$$R_{22} = \frac{12(2k - 1) \left[ (k + 1)(8k - 11) + 120C_0 \right]}{\Delta t^2 k(k + 1)(12C_0 + k^2 - 1)(60C_0 + k^2 - 4)} D_{fr} - \quad (8)$$

дисперсия ошибки фильтрации радиальной скорости;

$$R_{33} = \frac{720}{\Delta t^4 k(k^2 - 1)(60C_0 + k^2 - 4)} D_{fr} - \quad (9)$$

дисперсия ошибки фильтрации радиального ускорения;

$$R_{12} = R_{21} = \frac{18(2k - 1)(k - 1) \left[ (k + 1)(k - 2) + 20C_0 \right]}{\Delta t k(k + 1)(12C_0 + k^2 - 1)(60C_0 + k^2 - 4)} D_{fr} - \quad (10)$$

коэффициент ковариации ошибок фильтрации дальности и радиальной скорости;

$$R_{13} = R_{31} = \frac{60 \cdot (k - 2)}{\Delta t^2 \cdot k(k + 1)(60 \cdot C_0 + k^2 - 4)} D_{fr} - \quad (11)$$

коэффициент ковариации ошибок фильтрации дальности и радиального ускорения;

$$R_{23} = R_{32} = \frac{360}{\Delta t^3 k(k + 1)(60C_0 + k^2 - 4)} D_{fr} - \quad (12)$$

коэффициент ковариации ошибок фильтрации радиальной скорости и радиального ускорения.

Анализ полученных результатов позволяет утверждать, что на начальных шагах фильтрации корреляционные взаимосвязи между результатами измерения дальности и радиальной скорости, а также дальности и радиального ускорения цели практически отсутствуют. В то же время корреляция между радиальной скоростью и радиальным ускорением оказывается довольно сильной.

### Весовые коэффициенты фильтра по конечной выборке

Для получения выражения расчета весовых коэффициентов фильтрации на  $k$ -м шаге использовано приведенное выше выражение (1), из которого следует, что вектор весовых коэффициентов фильтрации  $\mathbf{w}_k$  для  $k$ -го шага измерений определен следующим выражением:

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{Q}_{0k}. \quad (13)$$

Учитывая размерности вектора разовых оценок  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$  и вектора состояния  $\hat{\mathbf{a}}_k$ , размерность вектора весовых коэффициентов равна  $3 \times 2k$ . Первая строка матрицы  $\mathbf{w}_k$  содержит весовые коэффициенты для получения фильтрованной оценки дальности, вторая – радиальной скорости, третья – радиального ускорения. Весовые коэффициенты с  $w_{i,1}$  по  $w_{i,k}$  ( $i=1,2,3$ ) предназначены для фильтрации  $k$  разовых оценок дальности  $\hat{r}_{fj}$  ( $j=\overline{1,k}$ ), обозначены как  $w_{i,j}^r$ . Коэффициенты с  $w_{i,k+1}$  по  $w_{i,2k}$  предназначены для фильтрации  $k$  разовых оценок радиальной скорости  $\hat{V}_{rfj}$ , обозначены как  $w_{i,j}^v$ .

В общем виде уравнения фильтрации дальности, радиальной скорости и ускорения можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} \hat{r}_k &= \sum_{i=1}^k w_{1,i}^r \hat{r}_{fi} + \sum_{i=1}^k w_{1,i}^v \hat{V}_{rfi}; \\ \hat{V}_{rk} &= \sum_{i=1}^k w_{2,i}^r \hat{r}_{fi} + \sum_{i=1}^k w_{2,i}^v \hat{V}_{rfi}; \\ \hat{a}_{rk} &= \sum_{i=1}^k w_{3,i}^r \hat{r}_{fi} + \sum_{i=1}^k w_{3,i}^v \hat{V}_{rfi}. \end{aligned} \quad (14)$$

После подстановки (4), (5) и (7)–(12) в (13) получены следующие соотношения для весовых коэффициентов конечной импульсной характеристики фильтра.

1. Весовые коэффициенты для оценки радиальной дальности:

$$\begin{aligned} w_{1,i}^r &= \frac{3(k-1)(k-2)[(k+2)(k+1) - 2i(4k+3-5i)]}{k(12C_0+k^2-1)(60C_0+k^2-4)} - \\ & - \frac{24C_0[(k+1)(2k^2+7) - 15i(ik+k+1-2i) - 30C_0(1+k)]}{k(k+1)(12C_0+k^2-1)(60C_0+k^2-4)}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$w_{1,i}^v = C_0 \Delta t \frac{6(k^2-1)(k-2)(10i-4k-3) + 360C_0(k+1-4i+2ik)}{k(k+1)(12C_0+k^2-1)(60C_0+k^2-4)}. \quad (16)$$

2. Весовые коэффициенты для оценки радиальной скорости:

$$w_{2,i}^r = \frac{6[(4k-3)(k+2)(k+1) - 2ik(14k-15i) - 2i(15i-11)]}{k(12C_0+k^2-1)(60C_0+k^2-4)\Delta t} + \frac{360C_0[k-4ik-2i(2-3i)+1]}{k(k+1)(12C_0+k^2-1)(60C_0+k^2-4)\Delta t}, \quad (17)$$

$$w_{2,i}^v = \frac{-12C_0[(k+1)(14k^2-11) - 30i(k^2-1) + 120C_0(k+1-3i)]}{k(k+1)(12C_0+k^2-1)(60C_0+k^2-4)}. \quad (18)$$

3. Весовые коэффициенты для оценки радиального ускорения:

$$w_{3,i}^r = \frac{60(k^2-6ik+3k+6i^2-6i+2)}{\Delta t^2 k(k^2-1)(60C_0+k^2-4)}; \quad (19)$$

$$w_{3,i}^v = \frac{-360C_0(k-2i+1)}{\Delta t k(k^2-1)(60C_0+k^2-4)}. \quad (20)$$

Для получения фильтрованных оценок измеряемых параметров использовались текущие оценки радиальной дальности  $\hat{r}_{fi}$  и радиальной скорости  $\hat{V}_{rfi}$ . Фильтрованные значения вектора состояния и корреляционная матрица ошибок, полученные по трем первым разовым оценкам ( $k=3$ ) инициализируют дальнейшую работу фильтра Калмана.

## Сопоставление качества фильтрации для типовых РЛС обзора

*Комплекс математического моделирования.* Вектор наблюдаемых параметров  $\theta$  включал оценки радиальной дальности или оценки радиальной дальности и скорости (получаемой из оценки частоты Доплера). Вектор состояния цели содержал фильтрованные оценки радиальной дальности, скорости и ускорения, в зависимости от номера шага фильтрации  $k$ . Данный комплекс позволял: формировать входное воздействие в виде суммы задающего и возмущающего воздействия. Задающее воздействие представлено детерминированной полиномиальной моделью 2-го порядка. Возмущающее воздействие соответствовало ошибкам первичных измерений дальности  $\sigma_{r_f}$  и радиальной скорости  $\sigma_{v_{r_f}}$ .

Сопоставительный анализ показателей качества фильтрации проведен для шести гипотетических РЛС. Используемые при расчетах показатели тактико-технических характеристик выбраны с учетом их физической реализуемости, а их значения сведены в таблицу, приведенную ниже.

Расчитано 20 точек траектории. Для каждой точки определены значения дальности и радиальной скорости с учетом прямолинейного равноускоренного движения. В дальнейшем для набора статистики осуществлено наложение ошибок разового оценивания распределенных по нормальному закону с дисперсией исходя из ТТХ РЛС. При моделировании проведено 100000 опытов, что позволило получить высокую достоверность результатов.

**Значения показателей ТТХ гипотетических РЛС**

Тип гипотетической РЛС	РЛС 1	РЛС 2	РЛС 3	РЛС 4	РЛС 5	РЛС 6
Диапазон несущей частоты	<b>МВ</b>	<b>МВ</b>	<b>ДМВ</b>	<b>ДМВ</b>	<b>СМВ</b>	<b>СМВ</b>
СКО оценки дальности $\sigma_{r_f}$ , м	250	250	250	250	50	50
СКО оценки радиальной скорости $\sigma_{v_{r_f}}$ , м/с	35	25	15	15	1	1
Период обзора $T_{обз}$ , с	10	10	10	5	10	5
Значение коэффициента $C_{\Theta}$	0,51	1	2,78	11,01	25	100

*Показатели качества.* Показателем качества фильтрации выбрано СКО абсолютной (суммарной) ошибки измерения фильтруемого параметра  $x$  (наклонная дальность  $r$ , радиальная скорость  $V_r$ , радиальное ускорение  $a_r$ ), вычисляемое на каждом обзоре, позволившее учесть динамическую и флуктуационную составляющие [4, 5]:

$$\sigma_x(k) = \sqrt{\frac{1}{N_{оп}} \sum_{j=1}^{N_{оп}} [x_{\phi_j}(k) - x_{и_j}(k)]^2}, \quad (21)$$

где  $k$  – номер шага наблюдения;  $N_{оп}$  – число проведенных опытов;  $x_{\phi_j}(k)$  – результат фильтрации параметра  $x$ ;  $x_{и_j}(k)$  – истинное значение фильтруемого параметра.

В качестве показателя, характеризующего относительный выигрыш в точности измерения параметра  $x$  за счет использования оценки частоты Доплера выраженный в процентах выбран коэффициент  $K_{\Delta\sigma_x}(k)$  (далее – выигрыш в точности фильтрации параметра  $x$ ):

$$K_{\Delta\sigma_x}(k) = \frac{\Delta\sigma_x(k)}{\sigma_{x(r)}(k)} \cdot 100\% = \frac{\sigma_{x(r)}(k) - \sigma_{x(r,V_r)}(k)}{\sigma_{x(r)}(k)} \cdot 100\%, \quad (22)$$

где  $\sigma_{x(r)}(k)$  – СКО ошибки фильтрации параметра  $x$  по оценкам дальности;  $\sigma_{x(r,V_r)}(k)$  – СКО ошибки фильтрации параметра  $x$  по оценкам дальности и радиальной скорости.

*Ошибки фильтрации дальности.* По результатам моделирования рассчитаны СКО ошибок фильтрации дальности  $\sigma_{r(r,V_r)}(k)$  и  $\sigma_{r(r)}(k)$ . На рис. 1, а приведены зависимости применительно для РЛС 3, как среднестатистического представителя парка обзорных станций.

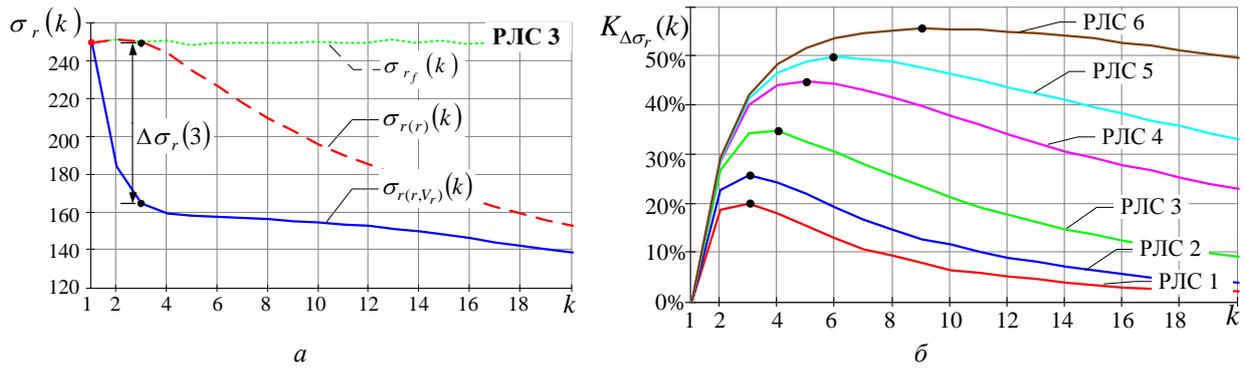


Рис. 1. Показатели качества фильтрации дальности:  $a$  – СКО ошибок фильтрации дальности;  $b$  – выигрыш в точности фильтрации дальности

Как видно из рис. 1,  $a$ , на первом шаге получен одинаковый результат фильтрации для двух случаев наблюдаемых параметров, равный результату разовой оценки. Соответственно значение СКО на первом шаге для обоих алгоритмов равно СКО первичного оценивания дальности. Начиная со второго отсчета, СКО ошибки фильтрации дальности для обоих вариантов уменьшаются за счет меньшей ошибки экстраполяции дальности, при этом скорость спада при использовании оценок радиальной скорости больше. Увеличение размера выборки разовых оценок устремит зависимости СКО к некоему предельному значению. Таким образом, при малой длине выборки использование оценок радиальной скорости существенно повысит точность фильтрации дальности. Для численной оценки рассчитан выигрыш в точности фильтрации дальности  $K_{\Delta\sigma_r}(k)$  (22) для каждой РЛС и представлен на рис. 1,  $b$ .

Каждая зависимость выигрыша имеет максимум со значениями от 20 % при  $k=3$  (РЛС 1) до 55 % при  $k=9$  (РЛС 6). Этот максимум растет по экспоненциальному закону при увеличении коэффициента  $C_\theta$ .

*Ошибка фильтрации радиальной скорости.* В соответствии с выражением (21) осуществлен расчет СКО ошибок фильтрации радиальной скорости  $\sigma_{V_r(r)}(k)$ ,  $\sigma_{V_r(r,v_r)}(k)$  и графически представлен на рис. 2,  $a$ . Семейство зависимостей относительного выигрыша при фильтрации радиальной скорости по конечной выборке  $K_{\Delta\sigma_{V_r}}(k)$  (22) приведено на рис. 2,  $b$ .

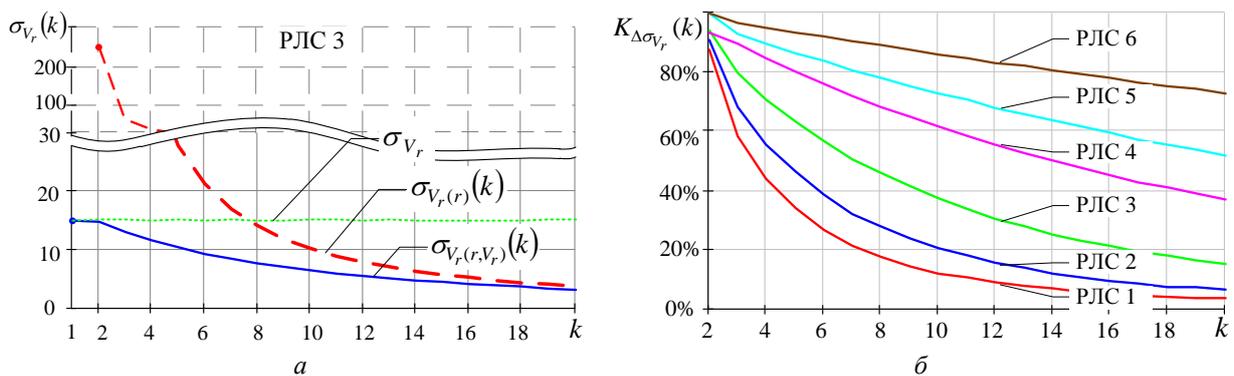


Рис. 2. Показатели качества фильтрации радиальной скорости:  $a$  – СКО ошибок фильтрации радиальной скорости;  $b$  – выигрыш в точности фильтрации радиальной скорости

Результат фильтрации радиальной скорости с использованием расширенного вектора формируется уже по результатам первого обзора, что на один период раньше, чем при работе только по отсчетам дальности. При этом ошибка фильтрации  $\sigma_{V_r(r,v_r)}(k)$  при  $k=1$  равна ошибке разовой оценки радиальной скорости. Зависимость  $\sigma_{V_r(r)}(k)$  пересекает данный уровень лишь при  $k=7-8$ . Таким образом, при фиксированной длине выборки за счет использования оценок радиальной скорости ошибка фильтрации уменьшится, а требуемая точность достигнется за меньшее время. Степень влияния на точность фильтрации оценок радиальной скорости зависит от параметров РЛС. Снижение ошибки оценки радиальной

скорости (РЛС 5, РЛС 6) и сокращение времени обновления информации (РЛС 4, РЛС 6) повысит относительный выигрыш фильтрации радиальной скорости.

*Ошибки фильтрации радиального ускорения.* На рис. 3, а приведены графики, характеризующие СКО ошибки фильтрации радиального ускорения  $\sigma_{a_r}(k)$ ,  $\sigma_{a_r(r,V_r)}(k)$  для двух вариантов векторов наблюдаемых параметров. Степень улучшения точностных характеристик раскрыта выигрышем в точности при фильтрации радиального ускорения  $K_{\Delta\sigma_{a_r}}(k)$  (22) для каждого типа гипотетической РЛС. Семейство зависимостей представлено на рис. 3, б.

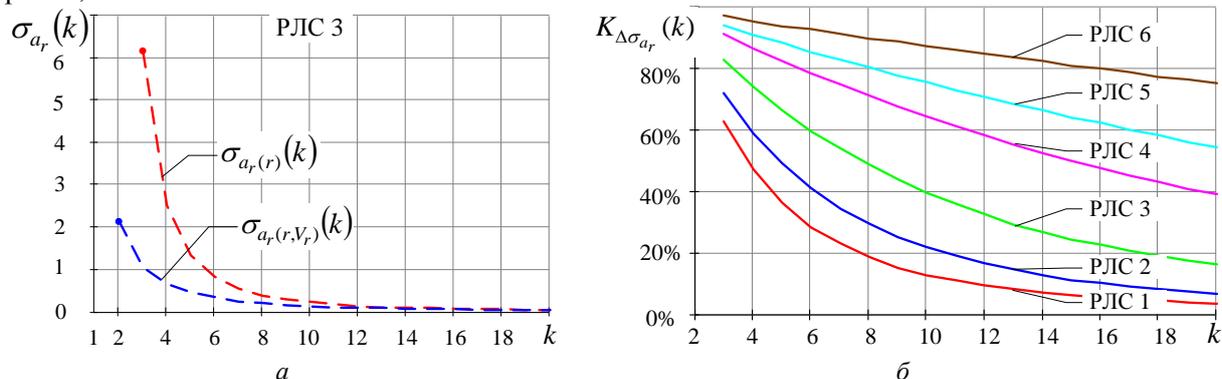


Рис. 3. Показатели качества фильтрации радиального ускорения: а – СКО ошибок фильтрации радиального ускорения; б – выигрыш в точности фильтрации радиального ускорения.

Использование разовых оценок радиальной скорости позволяет не только снизить СКО ошибки фильтрации радиального ускорения, но и сокращает время выдачи первого результата на один период обращения к цели.

### Заключение

В статье в полном объеме приведены результаты синтеза фильтра второго порядка по конечной выборке с использованием оценок радиальной дальности и радиальной скорости. Результатом является выражение для корреляционных матриц ошибок фильтрации дальности, радиальной скорости и радиального ускорения при наблюдении дальности совместно с радиальной скоростью, а также выражения для фильтрации каждого из параметров.

Использование при фильтрации в дополнение к оценкам радиальной дальности разовых оценок радиальной скорости снижает СКО ошибок всех элементов вектора состояния, особенно при малом числе обзоров. Увеличение коэффициента  $C_0$  улучшает эффективность использования дополнительного параметра в фильтрации дальности.

Из сопоставления абсолютных ошибок фильтрации следует, что использование разовых оценок радиальной скорости, получаемых за счет оценивания частоты Доплера, позволяет для радиолокаторов обзора:

- существенно повысить скорость сходимости ошибок фильтрации, как радиальной дальности, так и радиальной скорости;
- получать уже на первом шаге наблюдения оценку радиальной скорости цели, а на втором шаге – радиального ускорения, что может оказаться особенно важным с точки зрения задачи целеуказания внешним потребителям траекторной информации.

Все это увеличивает скорость захвата цели на сопровождение по дальности, что является критически важным для радиолокаторов обзора зенитно-ракетных комплексов малой и средней дальности. В данной статье рассмотрены вопросы влияния оценок частоты Доплера в РЛС обзора для фильтра Винера.

# POLYNOMIAL TRAJECTORIES FILTERING OF MANEUVERING TARGETS WITH FINAL ESTIMATION USAGE OF RANGE AND RANGE RATE

S.A. GORSHKOV, V.N. ZAVIZHENETS

## Abstract

Using features of Doppler frequency and two its derivatives in the filtration problem for radar survey have been considered. Comparative analysis of filtration parameters for different radar survey have been accomplished.

*Keywords:* filtration, bounded set, least-squares method, range, speed, radar.

## Список литературы

1. Кузьмин С.З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации. М., 1974.
2. Горшков С.А., Завиженец В.Н. // Докл. БГУИР. 2013. № 1 (71). С. 78–83.
3. Горшков С.А., Завиженец В.Н. // Докл. БГУИР. 2013. № 3 (73). С. 69–75.
4. Михалковский А.А., Солонар А.С. // Докл. БГУИР. 2013. № 6 (76). С. 79–85.
5. Хмарский П.А., Солонар А.С. // Докл. БГУИР. 2012. № 7 (69). С. 47–53.
6. Канащенков А.И., Меркулов В.И. // Авиационные системы управления. Принципы построения систем радиоуправления. Основы синтеза и анализа. М., 2003.