



<http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2026-24-4-72-80>

УДК 621.391.13

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ СВЯЗИ И ВЕЩАНИЯ С МНОГОКАСКАДНЫМ РАЗНОТИПНЫМ КОДИРОВАНИЕМ И МНОГОПОЗИЦИОННОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Э. Б. ЛИПКОВИЧ, Н. И. БЕЛЕНКЕВИЧ, М. И. ЗОРЬКО

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
(Минск, Республика Беларусь)*

Аннотация. Представлены аналитические модели расчета и методика исследования показателей помехоустойчивости, энергетической и информационной эффективности систем с последовательным составным кодированием на базе сверточных кодов большой конструктивной длины в сочетании с двоичными блочными кодами Боуза – Чоудхури – Хоквингема, сверточными и недвоичными кодами Рида – Соломона. Расчетные модели предусматривают проведение детальных исследований свойств составных кодовых конструкций с многопозиционными видами модуляции и декодированием по алгоритму Витерби с мягким решением для сверточных кодов и кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингема и жестким решением для кодов Рида – Соломона. В отличие от известных подходов данная методика не требует знания весовых коэффициентов спектров используемых кодов, не ограничивает выбор местоположения кодов в кодовой конструкции и не предполагает применения при вычислениях сложных процедур компьютерного моделирования. Исследования выполняются в замкнутом виде на основании заданных параметров кодов в составной конструкции и требований к обеспечению достоверности приема. Показано, что помехоустойчивость систем с двухкаскадным последовательным кодированием на базе сверточных кодов с конструктивной длиной $K = 13$ в сочетании с простыми типами сверточных кодов, кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингема или Рида – Соломона сопоставима с помехоустойчивостью лучших моделей турбокодов с итеративным параллельным MAP-декодированием. При этом исключены недостатки турбокодов, обусловленные применением высокоразмерных перемежителей.

Ключевые слова: многокаскадное кодирование, составные коды, эффективность декодирования, помехоустойчивость, достоверность приема.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования. Липкович, Э. Б. Помехоустойчивость систем связи и вещания с многокаскадным разнотипным кодированием и многопозиционной модуляцией / Э. Б. Липкович, Н. И. Беленкевич, М. И. Зорько // Доклады БГУИР. 2026. Т. 24, № 4. С. 72–80. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2026-24-4-72-80>.

NOISE IMMUNITY OF COMMUNICATION AND BROADCASTING SYSTEMS WITH MULTI-STAGE DIFFERENT-TYPE CODING AND MULTI-POSITION MODULATION

EDUARD LIPKOVICH, NATALIA BELENKEVICH, MIKHAIL ZORKA

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The article presents analytical models for calculating and a methodology for studying the noise immunity, energy, and information efficiency of systems with sequential composite coding based on long-length convolutional codes in combination with binary block Bose – Chaudhuri – Hocquenghem codes, and convolutional and nonbinary Reed-Solomon codes. The calculation models allow for detailed studies of the properties of composite code structures with multi-position modulation types and decoding using the Viterbi algorithm with a soft

decision for convolutional and Bose – Chaudhuri – Hocquenghem codes and a hard decision for Reed – Solomon codes. Unlike known approaches, this methodology does not require knowledge of the spectral weighting coefficients of the codes used, does not limit the choice of code locations within the code structure, and does not involve the use of complex computer modeling procedures in the calculations. The studies are performed in a closed-loop manner based on the specified parameters of the codes in the composite structure and the requirements for ensuring reliable reception. It is shown that the noise immunity of systems with two-stage sequential coding based on convolutional codes with a design length of $K = 13$ in combination with simple convolutional codes, such as Bose – Chaudhuri – Hocquenghem or Reed – Solomon codes, is comparable to the noise immunity of the best turbo code models with iterative parallel MAP decoding. Furthermore, the disadvantages of turbo codes caused by the use of high-dimensional interleavers are eliminated.

Keywords: multi-stage coding, composite codes, decoding efficiency, noise immunity, reception reliability.

Conflict of interests. The authors declare that there is no conflict of interests.

For citation. Lipkovich E., Belenkevich N., Zorka M. (2026) Noise Immunity of Communication and Broadcasting Systems with Multi-Stage Different-Type Coding and Multi-Position Modulation. *Doklady BGUIR*. 24 (4), 72–80. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2026-24-4-72-80> (in Russian).

Введение

Значительные успехи в технике высокоскоростной обработки больших объемов информации позволили приблизить показатели систем с помехоустойчивым кодированием к границе Шеннона по пропускной способности. Одним из приоритетных направлений в этой области стала технология турбокодирования, предусматривающая на стороне передачи параллельное соединение двух или более рекурсивных систематических сверточных кодов (Recursive Systematic Convolution, RSC) в сочетании с высокоразмерными перемежителями данных для снижения корреляции между соседними символами кодовых слов. На стороне приема используется два или более связанных между собой декодера, каждый из которых, базируясь на критерии максимальной апостериорной вероятности, уточняет результат предыдущего декодирования, что с ростом итераций уменьшает вероятность ошибки в бите декодируемых символов [1, 2]. Оптимальным для турбокодирования считается MAP (maximum a posteriori) – алгоритм, который вычисляет значение каждого бита и оценивает верность выполненных решений. Однако MAP-алгоритм требует больших вычислительных затрат на декодируемый бит информации. На практике часто применяют его версии – Log-MAP- и Max-Log-MAP-алгоритмы, которые проще и незначительно уступают в эффективности. Тем не менее они в несколько раз сложнее используемого в системах с кодами Боуза – Чоудхури – Хоквингема (БЧХ) и со сверточными кодами (СК) алгоритма Витерби с мягким решением SOVA (Soft Output Viterbi Algorithm) [3].

В [1–3] показано, что турбокод, состоящий из двух RSC-кодов с конструктивными длинами $K = 5$, псевдослучайного перемежителя длиной 65 536 бит, двух Log-MAP-декодеров с 18 итерациями декодирования, обеспечивает в гауссовском канале отношение сигнал/шум (ОСШ) 0,7 дБ при вероятности ошибки $P_b = 10^{-5}$, что всего на 0,5 дБ больше порога Шеннона для кодовой скорости $R = 1/2$. По числу вычислительных операций при декодировании этот турбокод эквивалентен однокаскадному сверточному кодеру с конструктивной длиной $K = 15$ и декодированием по алгоритму SOVA [3]. Данный результат является основанием для изучения альтернативных по эффективности составных кодовых конструкций, предусматривающих последовательное соединение СК большой конструктивной длины ($K = 7–13$) с другими типами кодов. В отличие от турбокодов последовательное кодирование не требует применения высокоразмерных перемежителей, наличие которых приводит к существенной задержке сигналов, эффекту насыщения вероятности ошибки с ростом ОСШ и ограничению области их применения [3]. Для проведения исследований систем с составным кодированием и декодированием по алгоритму SOVA необходимы соответствующие методики и математические модели расчета.

Цель исследования – разработка аналитических моделей и методик расчета помехоустойчивости, энергетической и информационной эффективностей систем с многокаскадным последовательным кодированием на базе сверточных кодов с большой конструктивной длиной в сочетании с СК-, БЧХ-кодами и кодами Рида – Соломона (РС) в составном устройстве.

Аналитические модели расчета помехоустойчивости и эффективности систем с каскадным кодированием

Основываясь на соотношениях, полученных для систем с помехоустойчивым кодированием и многопозиционной модуляцией [4], величина ОСШ, при которой обеспечивается требуемая вероятность ошибки P_{bj} на выходе составной конструкции, определяется из соотношений:

$$h_j = 10 \lg \left[\frac{2,3}{\mu_{pj}} \left(D_{pj} - \lg \sqrt{2,3(D_{pj} - V_{pj})/\mu_{pj}} \right) \right]; \quad (1)$$

$$D_{pj} = -\lg P_{bj} + \lg(\chi_{pj} \sqrt{\mu_{pj}}), \quad V_{pj} = \lg \sqrt{2,3(D_{pj}/\mu_{pj})}, \quad \chi_{pj} = \frac{C_f}{q_f R_{pj} \sqrt{\pi}}, \quad (2)$$

где $h_j = \lg(E_0/N_0)$ – значение ОСШ, определяемое отношением средней энергии сигнала E_0 , приходящейся на бит информации, к спектральной плотности мощности шума N_0 ; μ_{pj} – результирующая эффективность составного декодирования, определяемая по формуле:

$$\mu_{pj} = \prod_{i=1}^j \mu_{ij} = \mu_{1j} \mu_{2j} \dots \mu_{jj}, \quad (3)$$

μ_{ij} – эффективность i -й ступени декодирования; C_f , q_f – значения, зависящие от вида и порядка модуляции [4]; R_{pj} – результирующая кодовая скорость составного декодирования:

$$R_{pj} = \prod_{i=1}^j R_{ij} = R_{1j} R_{2j} \dots R_{jj} = (R_1 R_2 \dots R_j)(R_2 R_3 \dots R_j) \dots R_j, \quad (4)$$

R_{ij} – кодовая скорость i -й ступени декодирования; $R_i = k_i/n_i$ – кодовая скорость i -го каскада кодирования, номер которого отсчитывается от выходного каскада блока кодирования к источнику сигнала; k_i , n_i – число символов на входе и выходе i -го каскада кодирования соответственно; i, j – номер и число ступеней декодирования.

Структура кодовой конструкции может содержать как одинаковые, так и разнотипные коды. Для одинаковых типов кодов в составном устройстве результирующая эффективность декодирования (3) представляется в виде:

$$\mu_{pj}^{\text{СК}} = (q_f R_{1j}^{\text{СК}} d_{1j}^{\text{СК}} \beta_{1j}^{\text{СК}}) (R_{2j}^{\text{СК}} d_{2j}^{\text{СК}} \beta_{2j}^{\text{СК}}) \dots (R_{jj}^{\text{СК}} d_{jj}^{\text{СК}} \beta_{jj}^{\text{СК}}); \quad (5)$$

$$\mu_{pj}^{\text{БЧХ}} = (q_f R_{1j}^{\text{БЧХ}} d_{1j}^{\text{БЧХ}} \beta_{1j}^{\text{БЧХ}}) (R_{2j}^{\text{БЧХ}} d_{2j}^{\text{БЧХ}} \beta_{2j}^{\text{БЧХ}}) \dots (R_{jj}^{\text{БЧХ}} d_{jj}^{\text{БЧХ}} \beta_{jj}^{\text{БЧХ}}); \quad (6)$$

$$\mu_{pj}^{\text{РС}} = (q_f R_{1j}^{\text{РС}} (t_{1j}^{\text{РС}} + 1) \beta_{1j}^{\text{РС}}) (R_{2j}^{\text{РС}} (t_{2j}^{\text{РС}} + 1) \beta_{2j}^{\text{РС}}) \dots (R_{jj}^{\text{РС}} (t_{jj}^{\text{РС}} + 1) \beta_{jj}^{\text{РС}}), \quad (7)$$

где β_{ij} – множитель, снижающий эффективность i -й ступени декодирования в зависимости от параметров и вероятности ошибки P_{bj} на ее выходе; t_i – количество исправленных символов декодером РС; d_i – свободное расстояние кода.

При использовании в кодовой конструкции разнотипных кодов значение μ_{pj} определяется произведением μ_{ij} отдельных ступеней декодирования соответствующих кодов.

Величина множителя $\beta_{ij}^{\text{СК}}$ для сверточного декодирования с мягким решением по алгоритму SOVA определяется из соотношений:

$$\beta_{ij}^{\text{СК}} = \frac{1}{\left(\left(1 + \frac{\lg(R_{ij}^{\text{СК}} d_i^{\text{СК}})}{-\lg P_{bi}} \right) \left(1 + \frac{\exp(\lg P_{bi})}{1 - R_{ij}^{\text{СК}}} - \exp(F) \right) \right)}; \quad (8)$$

$$F = \lg(P_{bi}) R_{ij}^{\text{СК}} \lg(R_{ij}^{\text{СК}} d_i^{\text{СК}}) (K_i - \lg(R_{ij}^{\text{СК}} d_i^{\text{СК}})), \quad (9)$$

где K_i – конструктивная длина СК i -й ступени декодирования.

Согласно (8), (9), множитель $\beta_{ij}^{\text{СК}}$ зависит только от параметров кода и величины P_{bj} на выходе i -й ступени декодирования. Он изменяется от единицы при квазибезошибочном приеме до значе-

ний, близких к нулю, при грубых ошибках. Снижение $\beta_{ij}^{СК}$ с ростом ошибок уменьшает эффективность декодирования μ_{pi} и увеличивает ОСШ. При $P_{bj} \leq 10^{-5}$ и $K_i \geq 7$ слагаемое $\exp(F) \rightarrow 0$, и расчет по (8) упрощается.

В табл. 1 приведены значения $d_i^{СК}$ для оптимальных образующих полиномов СК в зависимости от кодовой скорости R_i и конструктивной длины кода K_i .

Таблица 1. Значения кодового расстояния при заданных R_i и K_i
Table 1. Code distance values for given R_i and K_i

Кодовая скорость R_i	Кодовое расстояние для конструктивной длины кода K_i						
	3	5	7	9	11	13	15
1/2	5	8	10	12	14	16	18
3/4	—	4	5	6	7	8	9
7/8	—	—	3	4	5	6	7

Величина множителя $\beta_{ij}^{БЧХ}$ в системе с БЧХ-кодированием по алгоритму SOVA определяется следующим образом:

$$\beta_{ij}^{БЧХ} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\lg(R_{ij}^{БЧХ} d_i^{БЧХ})}{-\lg P_{bi}}\right) \left(1 + Z \left(\frac{\lg(R_{ij}^{БЧХ} d_i^{БЧХ})}{-\lg P_{bi}} + (1 + R_{ij}^{БЧХ}) \lg(R_{ij}^{БЧХ} d_i^{БЧХ}) \exp(\lg P_{bi})\right)\right)}; \quad (10)$$

$$Z = (1 + R_{ij}^{БЧХ}) \lg \left[\left(R_{ij}^{БЧХ} (2R_{ij}^{БЧХ} + \lg(R_{ij}^{БЧХ} d_i^{БЧХ})) R_{ij}^{БЧХ} d_i^{БЧХ} \right) / (1 - R_{ij}^{БЧХ}) \right]. \quad (11)$$

Согласно (10), (11), величина $\beta_{ij}^{БЧХ}$, подобно $\beta_{ij}^{СК}$, изменяется в зависимости от параметров и значения P_{bj} в пределах $0 \leq \beta_{ij} \leq 1$, вызывая заметное снижение эффективности μ_{ij} при $\beta_{ij}^{БЧХ} \rightarrow 0$. Для получивших признание расширенных БЧХ-кодов значения $d_i^{БЧХ}$ определяются из таблиц [5] или вычисляются на основании формулы

$$d_i^{БЧХ} = \left\lfloor 2(t_i^{БЧХ} + 1) \right\rfloor, \quad t_i^{БЧХ} \geq \frac{n_i^{БЧХ} - k_i^{БЧХ}}{p}, \quad n_i^{БЧХ} = 2^p, \quad (12)$$

где $t_i^{БЧХ}$ – количество исправляемых ошибок; $n_i^{БЧХ}$, $k_i^{БЧХ}$ – общее и информационное число символов в кодовом слове; p – целое число; $\lfloor x \rfloor$ – целая часть числа x .

Если в кодовой конструкции используется кодирование на базе кодов РС с жестким решением о символе, то:

$$\beta_{ij}^{РС} = \frac{1}{\left(1 + \frac{2 \lg(R_{ij}^{РС} d_i^{РС})}{-\lg P_{bi}}\right) \left(1 + \frac{t_i^{РС} \xi_i}{4(-\lg P_{bi})} - t_i^{РС} \lg(R_{ij}^{РС} d_i^{РС}) \exp(\lg P_{bi})\right)}; \quad (13)$$

$$\xi_i = (1 + R_{ij}^{РС}) \lg \left[R_{ij}^{РС} \frac{1 + \lg(R_{ij}^{РС} d_i^{РС})}{(1 + R_{ij}^{РС})(1 - R_{ij}^{РС})} \right], \quad (14)$$

где $d_i^{РС}$ – минимальное кодовое расстояние, определяемое как:

$$d_i^{РС} = 2t_i^{РС} + 1, \quad t_i^{РС} = \text{int} \left[\frac{n_i^{РС} - k_i^{РС}}{2} \right], \quad n_i^{РС} = 2^{l_i} - 1, \quad k_i^{РС} = n_i^{РС} - d_i^{РС} + 1, \quad (15)$$

l_i – число бит в символе; $n_i^{РС}$, $k_i^{РС}$ – общее и информационное число символов в кодовом слове.

Из анализа поведения множителя β_{ij} для кодов СК, БЧХ и РС следует, что его величина при равных для кодов значениях $R_{ij} d_i$ больше для сверточных кодов. Поэтому в кодовых конструкциях предпочтительно в первой ступени декодирования использовать СК, который обеспечивает лучшее исправление грубых ошибок.

В системах с последовательным составным кодированием расчет ОСШ по (1) и (2), при котором обеспечивается требуемое значение P_{bj} на выходе устройства, сопряжен с необходимостью знания P_{bi} на выходах отдельных ступеней декодирования для определения соответственно β_{ij} и μ_{ij} . Расчет P_{bj} выполняется поэтапно от последней j -й ступени декодирования в направлении первой, согласно следующей формуле:

$$-\lg(P_{b(j-1)}) = \frac{-\lg(P_{bj}) + \lg\left[\chi_{pj}\mu_{pj}/\sqrt{2,3(D_{pj}-V_{pj})}\right]}{\mu_{pj}/\mu_{p(j-1)}} - \lg\left[\frac{\chi_{p(j-1)}\mu_{p(j-1)}}{\sqrt{2,3(D_{p(j-1)}-V_{p(j-1)})}}\right]. \quad (16)$$

Выражение (16) является неявным и решается на каждом этапе определения P_{bi} , β_{ij} и μ_{ij} методом последовательных приближений, где в качестве первого приближения используется соотношение

$$\tilde{-\lg P_{b(j-1)}} = \frac{-\lg(P_{bj}) - \lg(\chi_{p(j-1)})}{\mu_{pj}/\mu_{p(j-1)}}. \quad (17)$$

Аналитическое представление ОСШ в функции P_{bj} (1) и (2) позволяет получить общую расчетную формулу энергетического выигрыша от использования составного кодирования (ЭВК) по сравнению с ОСШ приемного устройства h_0 без кодирования при обеспечении равных для них вероятностей ошибок

$$\Delta G_j = h_0 - h_j \cong 10 \lg \left[\frac{\mu_{pj}}{q_f} \left(1 - \frac{\lg[\mu_{pj}/(q_f R_{pj})]}{-\lg P_{bj} + \lg[C_f \mu_{pj}/(q_f R_{pj} \sqrt{2,3\pi})]} \right) \right], \quad (18)$$

где h_0 – значение ОСШ, рассчитываемое по (1) и (2) при $\mu_{pj} = q_f$ и $R_{pj} = 1$.

Из (18) следует, что величина выигрыша определяется в основном результирующей эффективностью μ_{pj} и изменяется от максимального значения $10 \lg(\mu_{pj}/q_f)$ при $P_{bj} \rightarrow 0$ до отрицательных значений в области грубых ошибок при условии

$$-\lg P_{bj} \leq \lg[\mu_{pj}/(q_f R_{pj})]/(1 - q_f/\mu_{pj}) - \lg[C_f \mu_{pj}/(q_f R_{pj} \sqrt{2,3\pi})]. \quad (19)$$

Основываясь на (1) и (2), представим аналитическое соотношение для определения и анализа информационной эффективности системы, которое учитывает ее энергетические и спектральные показатели и характеризуется отношением скорости передачи данных B_0 по каналу связи к его пропускной способности C , определяемой критерием Шеннона:

$$\eta_{\text{инф}j} = \frac{B_0}{C} = \frac{0,3mR_{1j}}{\lg[1 + mR_{1j}10^{0,1h_j}]} \cong \frac{0,3mR_{1j}}{\lg\left[1 + \frac{2,3mR_{1j}}{\mu_{pj}} \left(-\lg P_{bj} + \lg\left(\frac{C_f \mu_{pj}}{q_f R_{pj} \sqrt{2,3\pi}}\right) \right) \right]}, \quad (20)$$

где mR_{1j} – удельная скорость передачи данных; $m = \log_2 M$ – кратность M -позиционной модуляции.

Согласно (20), величина $\eta_{\text{инф}j}$ приближается к единице с увеличением удельной скорости mR_{1j} , результирующей эффективности μ_{pj} составной конструкции и уровня ошибки P_{bj} на ее выходе.

Если в процессе исследований помехоустойчивости системы необходимо проследить изменение величины h_{jM} с ростом порядка модуляции M , то достаточно при рассчитанном значении h_{jF} для F -позиционной модуляции использовать пересчетную формулу [6]

$$h_{jM} = h_{jF} + 10 \lg \left[\frac{q_{jF}}{q_{jM}} \left(1 - \frac{\lg(C_{jF}/C_{jM})}{-\lg P_{bj} + \lg[C_{jF} \mu_{pj}/(R_{pj} q_{jF} \sqrt{2,3\pi})]} \right) \right], \quad (21)$$

где q_{fF} , C_{fF} , q_{fM} , C_{fM} – значения, принадлежащие F - и M -порядкам модуляции [4], которые снижаются с ростом M и при КАМ- M с M , равным 4, 16, 64 и 256, составляют для $q_f = 1; 0,4; 1/7$ и $0,047$, для $C_f = 0,5; 0,375; 0,292$ и $0,234$.

Из (21) видно, что для $M > F$ с ростом M значение h_{jM} увеличивается вместе с ростом отношения q_{fF}/q_{fM} и при умеренных ошибках практически не зависит от P_{bj} . При грубых ошибках ($P_{bj} \geq 10^{-2}$) h_{jM} незначительно снижается. Выражение (21) справедливо также для систем без кодирования при условии $\mu_{pj} = q_{fF}$ и $R_{pj} = 1$.

Методика расчета составного кодирования

1. Однокаскадное кодирование и декодирование

1.1. По заданной вероятности ошибки P_{b1} на выходе устройства, принятого формата модуляции, параметров и типа кода (СК, БЧХ, РС) по (8)–(15) (при $i = j = 1$) определяется множитель β_{11} и по (5)–(7) – эффективность $\mu_{p1} = \mu_{11}$ первой ступени декодирования.

1.2. По (1), (2) определяется значение ОСШ h_1 , при котором реализуется P_{b1} .

1.3. По (18) рассчитывается ЭВК ΔG_1 и по (20) информационная эффективность $\eta_{\text{инф}1}$.

1.4. По (21) определяется ОСШ h_{1M} для других M -позиционных видов модуляции.

Пример. В системе с однокаскадным кодированием приняты сверточный код ($R_1 = 1/2$, $d_1 = 16$, $K_1 = 13$), модуляция КАМ-4 ($q_f = 1$, $C_f = 0,5$), вероятность ошибки $P_{b1} = 10^{-6}$. В результате расчета: $\beta_1 = 0,865$; $\mu_1 = 6,919$; $D_1 = 6,171$; $h_{1F} = 3,01$ дБ; $\Delta G_1 = 7,54$ дБ; $\eta_{\text{инф}1} = 0,605$ и $h_{1M} = 11,3$ дБ в случае использования КАМ-64 ($q_f = 1/7$, $C_f = 0,292$).

2. Двухкаскадное кодирование и декодирование

2.1. Для заданного состава кодовой конструкции, формата модуляции и требуемой вероятности ошибки P_{b2} на ее выходе по (8)–(15) определяется множитель β_{22} и по (5)–(7) – эффективность μ_{22} второй ступени декодирования.

2.2. По соотношениям (17), (8)–(15), (5) определяются соответственно примерные значения $-\lg P_{b1}$, множителя $\tilde{\beta}_{12}$ и эффективности $\tilde{\mu}_{12}$ первой ступени декодирования, а по (3) – результирующая эффективность $\tilde{\mu}_{p2} = \tilde{\mu}_{12}\mu_{22}$ двухступенчатого декодирования;

2.3. Используя (16) и п. 2.2, уточняются значения $-\lg P_{b1}$, β_{12} , μ_{12} и μ_{p2} .

2.4. По (1) и (2) определяется ОСШ двухкаскадной составной конструкции. Эту же величину можно получить при подстановке в (1) и (2) рассчитанных значений μ_{12} , χ_{p1} , $-\lg P_{b1}$, D_{p1} для первой ступени декодирования.

2.5. По (18) и (20) определяются энергетический выигрыш ΔG_2 и информационная эффективность $\eta_{\text{инф}2}$ системы с двухкаскадным кодированием.

2.6. По (21) и рассчитанному значению h_{2F} для системы с F -позиционной модуляцией определяется h_{2M} с M -позиционной модуляцией.

Пример. Кодовая конструкция состоит из внешнего расширенного кода БЧХ (128, 113, $d_2 = 6$) с $R_2 = 0,883$ и внутреннего СК с $R_1 = 1/2$, $K_1 = 13$, $d_1 = 16$. Модуляция КАМ-4, вероятность ошибки на выходе $P_{b2} = 10^{-6}$. В результате расчета: $R_{12} = 0,441$; $R_{p2} = 0,39$; $\mu_{22} = 3,223$; $\chi_{p1} = 0,639$; $\chi_{p2} = 0,724$; $-\lg P_{b1} = 1,913$; $\mu_{12} = 3,868$; $\mu_{p2} = 12,468$; $h_2 = 0,702$ дБ; $\Delta G_2 = 9,84$ дБ; $\eta_{\text{инф}2} = 0,82$ и $h_{2M} = 9,0$ дБ в случае КАМ-64. Полученное значение $h_2 = 0,702$ дБ для $P_{b2} = 10^{-6}$ сопоставимо с ОСШ турбокода, обсуждаемого во введении. По сравнению с однокаскадной конструкцией ($h_1 = 3,01$ дБ) выигрыш, обеспечиваемый БЧХ-кодом в двухкаскадной схеме, составляет 2,31 дБ. Если в примере поменять местами коды, то результаты расчета ухудшатся, и h_2 составит 1,86 дБ. Этот факт подтверждает необходимость размещения кода с наибольшей эффективностью в первой ступени декодирования.

3. Трехкаскадное кодирование и декодирование

3.1. Для заданного состава трехкаскадной кодовой конструкции, формата модуляции и требуемой вероятности ошибки P_{b3} на ее выходе по (8)–(15) определяется множитель β_{33} и по (5)–(7) – эффективность μ_{33} третьей ступени декодирования.

3.2. По методике п. 2.2 определяются примерные значения $-\lg P_{b2}$, $\tilde{\beta}_{23}$, $\tilde{\mu}_{23}$ второй и $-\lg P_{b1}$, $\tilde{\beta}_{13}$, $\tilde{\mu}_{13}$ первой ступеней декодирования, а также результирующие эффективности $\tilde{\mu}_{p2} = \tilde{\mu}_{13}\tilde{\mu}_{23}$, $\tilde{\mu}_{p3} = \tilde{\mu}_{13}\tilde{\mu}_{23}\mu_{33}$ двух- и трехступенчатого декодирования.

3.3. На основании данных п. 3.2 и (16) уточняются полученные выше значения. По (1) и (2) определяется ОСШ h_3 , по (18) – ЭВК ΔG_3 и по (20) – информационная эффективность $\eta_{\text{инф}3}$.

Пример. Трехкаскадная конструкция включает СК ($R_1 = 1/2$, $K_1 = 13$, $d_1 = 16$), БЧХ (128, 113, $d_2 = 6$), БЧХ (1024, 1003, $d_3 = 6$). Модуляция КАМ-4, вероятность ошибки на выходе третьей ступени декодирования $P_{b3} = 10^{-6}$. В результате расчета: $R_{13} = R_{p1} = 0,433$; $R_{23} = 0,865$; $R_{33} = 0,98$; $R_{p2} = 0,374$; $R_{p3} = 0,366$; $\chi_{p1} = 0,653$; $\chi_{p2} = 0,755$; $\chi_{p3} = 0,771$; $\mu_{33} = 2,971$; $-\lg P_{b2} = 1,988$; $\mu_{23} = 1,302$; $-\lg P_{b1} = 1,607$; $\mu_{13} = \mu_{p1} = 3,362$; $\mu_{p2} = 4,377$; $\mu_{p3} = 13,0$; $h_3 = 0,548$ дБ; $\Delta G_3 = 9,99$ дБ; $\eta_{\text{инф}3} = 0,874$. Применение трех ступеней кодирования и декодирования позволило обеспечить ОСШ $h_3 = 0,548$ дБ и выигрыш по сравнению с двухкаскадным устройством ($h_2 = 0,702$ дБ) в 0,154 дБ, что составляет 22 %. Причина сокращения выигрыша в ОСШ с усложнением кодовой конструкции обусловлена уменьшением значений результирующей кодовой скорости R_{pj} и эффективности декодирования μ_{pj} по мере добавления числа каскадов.

Результаты исследований и их обсуждение

На рис. 1, а представлены рассчитанные по приведенным соотношениям характеристики помехоустойчивости систем с модуляцией КАМ-4 и однокаскадным (линии 2–8) и двухкаскадным (линии 9–12) кодированием. Используются зависимости (2)–(4) для кодов РС (255, 239, $d_1 = 17$), СК ($R = 7/8$, $K = 9$, $d_1 = 4$) и БЧХ (128, 113, $d_1 = 6$), применяемые в составных конструкциях. Линия 1 соответствует режиму без кодирования. Из этих зависимостей следует, что в области грубых ошибок ($P_{b1} \geq 10^{-2}$) лучшей исправляющей способностью обладает СК, который рекомендуется для применения в первой ступени декодирования.

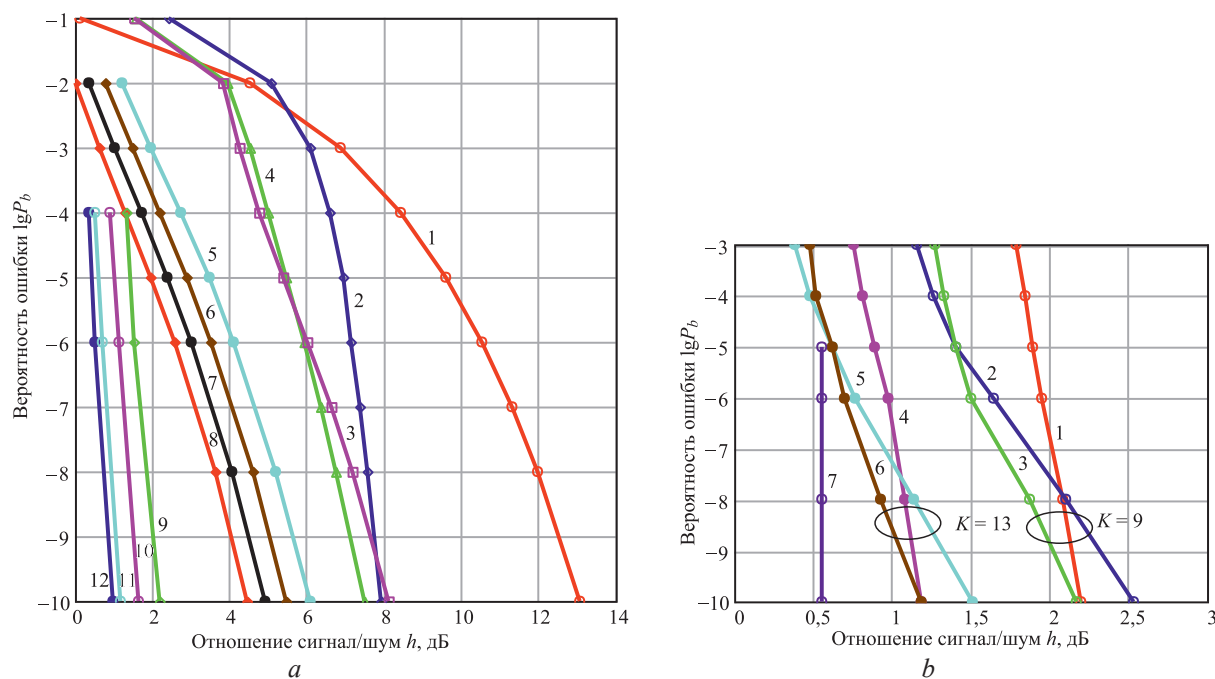


Рис. 1. Характеристики помехоустойчивости: а – одно- (линии 2–8) и двухкаскадное (линии 9–12) кодирование; б – двух- (линии 1–6) и трехкаскадное (линия 7) кодирование
Fig. 1. Noise immunity characteristics: а – one-stage (lines 2–8) and two-stage (lines 9–12) coding; б – two-stage (lines 1–6) and three-stage (line 7) coding

Код РС целесообразно использовать во внешних ступенях последовательного кодирования для обеспечения низких ОСШ в области незначительных ошибок. Зависимости (5)–(8) принадлежат однокаскадным СК с большой конструктивной длиной K , равной 9, 11, 13 и 15, и $R_1 = 1/2$, для которых увеличение K на две единицы уменьшает ОСШ примерно на 0,5 дБ. Переход к двухкаскадному кодированию (линии 9–12) с внутренним СК для $R_1 = 1/2$, с длиной K , равной 9, 11, 13 и 15, и внешним БЧХ-кодом (128, 113, $d_2 = 6$) позволяет при $P_{b2} = 10^{-6}$ и $P_{b2} = 10^{-10}$ снизить ОСШ по сравнению с зависимостями (5)–(8) на 2,05–2,60 и 3,5–3,9 дБ соответственно. Для умеренных ошибок значения ОСШ сравнимы с ОСШ турбокодов и в отличие от них свободны от эффекта насыщения вероятности ошибки $P_b \leq 10^{-6}$ с ростом ОСШ.

На рис. 1, b показано поведение характеристик двухкаскадного кодирования (линии 1–6) с использованием СК во внутренней ступени при $K = 9$ и $K = 13$ в сочетании с БЧХ (128, 113, $d_2 = 6$), СК ($R_2 = 7/8$, $K_2 = 9$, $d_2 = 4$) и РС (255, 239, $d_2 = 17$) во внешней ступени. Видно, что для кода с $K = 13$ значения ОСШ при $P_{b2} = 10^{-6}$ находятся в диапазоне 0,70–0,95 дБ. Эти показатели могут быть улучшены при использовании трехкаскадного кодирования (линия 7) по схеме СК ($(K = 13$, $R_1 = 1/2$, $d_1 = 16)$ + БЧХ (128, 113, $d_2 = 6$) + БЧХ (1024, 1003, $d_3 = 6)$), обеспечив высокую крутизну характеристики и низкие значения ОСШ ($h_3 = 0,55$ дБ) в широком диапазоне вероятностей ошибок P_{b3} .

Заключение

1. Представлены расчетные соотношения для проведения исследований энергетических и информационных характеристик систем с многопозиционной модуляцией и составным последовательным кодированием на базе сверточных и кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингема с мягким декодированием и недвоичных кодов Рида – Соломона с жестким решением о символе.

2. Аналитические модели имеют прямую зависимость отношения сигнал/шум от достоверности приема, предусматривают расчет характеристик систем при больших конструктивных длинах сверточных кодов, не требуют знания весовых коэффициентов спектра кодов и не предполагают использования сложных вычислительных процедур.

3. Приведены методики и примеры расчета характеристик систем с одно-, двух- и трехкаскадным кодированием и декодированием по заданным параметрам кодов и требуемой вероятности ошибки на выходе устройств.

4. Показано, что двухкаскадная кодовая конструкция, предусматривающая во внутренней ступени сверточные коды ($R_1 = 1/2$ и $K_1 = 13$), а во внешней – коды Боуза – Чоудхури – Хоквингема (128, 113, $d_2 = 6$), сверточные коды ($R = 7/8$, $K = 9$, $d_2 = 4$) или Рида – Соломона (255, 239, $d_2 = 17$), обеспечивает при $P_{b2} = 10^{-6}$ значения отношения сигнал/шум 0,70, 0,76 и 0,97 дБ соответственно. Эти значения сопоставимы с показателями турбокодов и могут быть улучшены применением во внешней ступени более длинных расширенных кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингема. С переходом к трехкаскадным схемам значение отношения сигнал/шум уменьшается, что важно при организации квазибезошибочного приема. Однако выигрыш от введения нового каскада сокращается.

Список литературы

1. Berrou, C. Near Optimum Error Correcting Coding and Decoding: Turbo-Codes / C. Berrou, A. Glavieux // IEEE Transactions on Communications. 1996. Vol. 44, Iss. 10. P. 1261–1271.
2. Золотарев, В. В. Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы / В. В. Золотарев, Г. В. Овечкин. М.: Горячая Линия – Телеком, 2004.
3. Новые алгоритмы формирования и обработки сигналов в системах подвижной связи / А. М. Шлома [и др.]. М.: Горячая линия – Телеком, 2008.
4. Липкович, Э. Б. Методика расчета эффективности систем связи с многопозиционными видами модуляции и многокаскадным составным кодированием / Э. Б. Липкович, В. В. Рабцевич // Доклады БГУИР. 2023. Т. 21, № 6. С. 45–52. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2023-21-6-45-52>.
5. Морелос-Сарагоса, Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение / Р. Морелос-Сарагоса. М.: Техносфера, 2005.
6. Липкович, Э. Б. Методика расчета энергетической эффективности систем связи и вещания с помехоустойчивым блочным кодированием и многопозиционной модуляцией / Э. Б. Липкович, Н. И. Беленкевич, М. И. Зорько // Доклады БГУИР. 2025. Т. 23, № 5. С. 45–52. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2025-23-5-45-52>.

Поступила в редакцию 01.06.2026

Принята в печать 30.06.2026

References

1. Berrou C., Glavieux A. (1996) Near Optimum Error Correcting Coding and Decoding. *IEEE Transactions on Communications*. 44 (10), 1261–1271.
2. Zolotarev V. V., Ovechkin G. V. (2004) *Noisy-Correcting Coding. Methods and Algorithms*. Moscow, Hotline – Telecom Publ. (in Russian).

3. Shloma A. M., Bakulin M. G., Kreindelin V. B., Shumov A. P. (2008) *New Algorithms for Signal Generation and Processing in Mobile Communication Systems*. Moscow, Hotline – Telecom Publ. (in Russian).
4. Lipkovich E. B., Rabtsevich V. V. (2023) A Method for Calculating of the Efficiency of Communication Systems with Multiple Modulation Types and Multi-Stage Composite Coding. *Doklady BGUIR*. 21 (6), 45–52. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2023-21-6-45-52> (in Russian).
5. Morelos-Zaragoza R. (2005) *The Art of Error Correcting Coding. Methods, Algorithms, Application*. Moscow, Technosphere Publ. (in Russian).
6. Lipkovich E. B., Belenkevich N. I., Zorka M. I. (2025) Methodology for Calculation the Energy Efficiency of Communication and Broadcasting Systems with Noise-Immune Block Coding and Multi-Position Modulation. *Doklady BGUIR*. 23 (5), 45–52. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2025-23-5-45-52> (in Russian).

Received: 1 June 2026

Accepted: 30 June 2026

Вклад авторов

Липкович Э. Б. разработал методику и порядок расчета систем с последовательным составным кодированием.

Беленкевич Н. И. осуществила моделирование характеристик систем.

Зорько М. И. выполнил расчеты и дал оценку результатам исследований.

Authors' contribution

Lipkovich E. developed a methodology and procedure for calculating systems with sequential composite coding.

Belenkevich N. performed modeling of system characteristics.

Zorko M. performed calculations and evaluated the research results.

Сведения об авторах

Липкович Э. Б., доц., доц. каф. инфокоммуникационных технологий, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (БГУИР)

Беленкевич Н. И., канд. техн. наук, доц. каф. инфокоммуникационных технологий, БГУИР

Зорько М. И., ассист. каф. инфокоммуникационных технологий, БГУИР

Information about the authors

Lipkovich E., Associate Professor, Associate Professor of the Department of Infocommunication Technologies, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (BSUIR)

Belenkevich N., Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor of the Department of Infocommunication Technologies, BSUIR

Zorka M., Assistant at the Department of Infocommunication Technologies, BSUIR

Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,
Минск, ул. П. Бровки, 6
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
Тел.: + 375 17 293-88-19
Email: belenkevich@bsuir.by
Беленкевич Наталья Ивановна

Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,
Minsk, P. Brovki St., 6
Belarusian State University
of Informatics and Radioelectronics
Tel.: +375 17 293-88-19
Email: belenkevich@bsuir.by
Belenkevich Natalia