



<http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2026-24-3-69-76>

УДК 004.032.26

ФИЗИЧЕСКИ ИНФОРМИРОВАННАЯ НЕЙРОННАЯ СЕТЬ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФFUЗИИ В ПРИРОДНЫХ ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ

Е. А. НИКОЛАЕНКО, П. К. ШАЛЬКЕВИЧ

*Международный государственный экологический институт имени А. Д. Сахарова
Белорусского государственного университета (Минск, Республика Беларусь)*

Аннотация. Рассмотрено применение физически информированных нейронных сетей для моделирования процессов миграции загрязняющих веществ в природных дисперсных средах. В качестве базовой математической модели использовалось одномерное уравнение конвективной диффузии, описывающее перенос вещества под действием адвективных и диффузионных механизмов. Предложена архитектура нейронной сети на основе многослойного персептрона, позволяющая аппроксимировать решение в непрерывной пространственно-временной области без необходимости построения расчетной сетки. Обучение модели осуществлялось путем минимизации функции потерь, включающей невязку дифференциального уравнения, а также отклонения от начальных и граничных условий. Для обучения использовались коллокационные точки, генерируемые внутри расчетной области. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что разработанная модель корректно воспроизводит основные физические закономерности процесса переноса, включая смещение максимума концентрации вследствие адвекции и его сглаживание за счет диффузии. Показано, что применение физически информированных нейронных сетей обеспечивает получение гладкого, устойчивого и физически согласованного решения даже при ограниченном объеме исходной информации. Отмечены преимущества метода, связанные с отсутствием необходимости в обучающих данных и возможностью работы в областях сложной геометрии.

Ключевые слова: нейронные сети, физически информированные нейронные сети, конвективная диффузия, функция потерь, моделирование загрязняющих веществ.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования. Николаенко, Е. А. Физически информированная нейронная сеть для решения уравнения конвективной диффузии в природных дисперсных средах / Е. А. Николаенко, П. К. Шалькевич // Доклады БГУИР. 2026. Т. 24, № 3. С. 69–76. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2026-24-3-69-76>.

A PHYSICALLY INFORMED NEURAL NETWORK FOR SOLVING THE CONVECTIVE DIFFUSION EQUATION IN NATURAL DISPERSED MEDIA

EKATERINA NIKOLAENKO, PAVEL SHALKEVICH

International Sakharov Environmental Institute of Belarusian State University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. This paper examines the application of physically informed neural networks to modeling pollutant migration processes in natural dispersed media. A one-dimensional convective diffusion equation describing substance transport under the influence of advective and diffusion mechanisms was used as the basic mathematical model. A neural network architecture based on a multilayer perceptron is proposed, enabling the approximation of the solution in a continuous spatiotemporal domain without the need to construct a computational grid. The model was trained by minimizing the loss function, which includes the residual of the differential equation, as well as deviations from the initial and boundary conditions. Collocation points generated within the computational domain were used for training. Computational experiments demonstrated that the developed model correctly reproduces the fundamental physical laws of the transport process, including the shift of the maximum concentration due to advection and its smoothing due to diffusion. It is demonstrated that the use of physically informed neural networks ensures a smooth, stable, and physically consistent solution even with a limited amount of initial information. The advantages of the method are noted, which include the absence of the need for training data and the ability to work in areas of complex geometry.

Keywords: neural networks, physics-informed neural networks, convection–diffusion, loss function, pollutant transport modeling.

Conflict of interests. The authors declare that there is no conflict of interests.

For citation. Nikolaenko E., Shalkevich P. (2026) A Physically Informed Neural Network for Solving the Convective Diffusion Equation in Natural Dispersed Media. *Doklady BGUIR*. 24 (3), 69–76. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2026-24-3-69-76> (in Russian).

Введение

Компьютерное моделирование сложных физических процессов позволяет проводить анализ и осуществлять прогнозирование переноса загрязняющих веществ в природных дисперсных средах при широком варьировании пространственно-временных параметров, климатических и гидрологических факторов [1]. В настоящее время разработано значительное число математических моделей, которые были реализованы в рамках программного обеспечения, позволяющего прогнозировать миграцию загрязняющих веществ в природных дисперсных средах, к которым относится почва. Однако применение существующих моделей сопряжено с рядом трудностей, обусловленных как физико-химическими особенностями почв, так и методологическими ограничениями численных методов [2].

Одна из ключевых проблем – гетерогенность почвенной среды. Почвы обладают сложной структурой, включающей пористость, гранулометрический состав и минералогию, которые могут значительно варьироваться даже на небольших участках. Существующие модели, как правило, упрощают эту структуру, что приводит к снижению точности прогнозов. Кроме того, на точность прогнозирования влияет неопределенность во входных наборах данных. Получение точных значений величин, таких как коэффициенты диффузии, параметры сорбции, влажность и температура, представляет собой сложную и трудоемкую задачу. В связи с этим часто используются усредненные или оценочные данные, что негативно сказывается на достоверности результатов моделирования. Кроме того, процессы миграции загрязняющих веществ зависят от химических реакций, биологических трансформаций, капиллярных и гравитационных потоков, а также от температурных градиентов. Одновременный учет всех этих факторов при моделировании требует значительных ресурсов даже при применении технологий параллельных вычислений в расчетах [3]. Решить данную проблему можно за счет моделей, построенных с использованием нейросетевых технологий. Значительные вычислительные ресурсы для нейросетевых моделей требуются, как правило, на стадии обучения, но прогнозирование при помощи уже обученных моделей особых вычислительных ресурсов не требуется и может быть выполнено быстро на обычном персональном компьютере [1].

К преимуществам нейросетевых моделей можно отнести их способность к учету множества факторов, таких как физико-химические свойства природной среды, рельеф и климатические условия. Однако существующие подходы моделирования распространения загрязняющих веществ [1–3] имеют ряд недостатков, связанных в первую очередь со сложностью процесса обучения сети при учете большого числа факторов. Развитие таких моделей в направлении учета трехмерного характера моделируемых процессов потребует не только использования больших вычислительных ресурсов, но и значительного перестроения самих моделей. Поэтому актуальной является задача разработки такой нейросетевой модели, которая при сравнительной простоте обучения будет учитывать достаточное для трехмерного прогнозирования загрязняющих веществ в природных дисперсных средах число входных параметров. Решать эту задачу предлагается за счет разработки физически информированной нейронной сети (ФИНС) [4].

Для подтверждения работоспособности предлагаемого подхода и оценки его применимости к задачам моделирования переноса загрязняющих веществ в настоящей статье будет рассмотрена задача моделирования одномерного диффузионного процесса. Выбор такой задачи обусловлен ее фундаментальным характером и наличием аналитических решений, что позволяет провести корректную валидацию разработанной модели и количественно оценить точность полученных в процессе исследований результатов. Эти результаты, в свою очередь, послужат основой для последующего расширения модели на более сложные многомерные задачи, учитывающие гетерогенность и нелинейные эффекты, характерные для природных дисперсных сред.

Применение нейронных сетей в задачах миграции загрязняющих веществ в природных дисперсных средах

Использование нейросетевых технологий при моделировании миграции загрязняющих веществ в природных дисперсных средах обусловлено их способностью эффективно аппроксимировать сложные нелинейные зависимости между параметрами среды и характеристиками распространения загрязнителей. В зависимости от структуры входных данных используются различные архитектуры нейронных сетей, включая многослойные перцептроны (МП), сверточные нейронные сети (СНС) и рекуррентные нейронные сети (РНС) [5]. Особое место в этой области занимают ФИНС. Особенностью их применения является то, что в качестве базовой модели может использоваться практически любая архитектура нейронной сети, включая МП, СНС и РНС. Это обеспечивает высокую гибкость при построении моделей и позволяет адаптировать ФИНС к различным типам входных данных и постановкам задач. При этом ключевое отличие ФИНС – возможность включения управляющих дифференциальных уравнений, описывающих процессы переноса загрязняющих веществ, непосредственно в функцию потерь. Такой подход позволяет учитывать физические закономерности наряду с эмпирическими данными, что особенно важно для природных дисперсных сред, характеризующихся высокой степенью неопределенности параметров [4].

Применение нейронных сетей, учитывающих физические принципы, в задачах моделирования миграции почвенных загрязнений отражает переход от эмпирических моделей типа «черный ящик» к моделям типа «серый ящик», в которых фундаментальные законы сохранения массы и импульса интегрируются непосредственно в процесс обучения. Одним из ключевых преимуществ данного подхода является возможность эффективного решения обратных задач, включая определение неизвестных коэффициентов фильтрации, параметров сорбции и скоростей химических реакций на основе разреженных и зашумленных данных, что затруднительно при использовании классических численных методов [6, 7]. В рамках решения прямых задач такие модели применяются для растолкования фильтрационных процессов на основе уравнения Ричардса, а также переноса растворенных веществ, описываемого уравнением адвекции–диффузии–реакции. При этом обеспечиваются высокая точность и физическая согласованность прогнозов даже при ограниченном объеме входной информации [6].

Практическая апробация физически информированных нейронных сетей на реальных объектах, включая промышленные площадки, показала их более высокую точность по сравнению с традиционными методами, такими как кригинг и линейная регрессия, при решении задач картирования загрязнений нефтепродуктами и тяжелыми металлами [8]. Аналогичные результаты получены при моделировании переноса микропластика в речных системах и миграции нитратов на сельскохозяйственных территориях. Дополнительным преимуществом ФИНС является их бессеточная природа, позволяющая избежать вычислительных сложностей, связанных с построением расчетных сеток для областей со сложной геометрией, что делает их применение эффективным при моделировании процессов в природных дисперсных средах, характеризующихся высокой пространственной неоднородностью.

Описание феноменологической модели на основе дифференциального уравнения

Уравнение конвективной диффузии является основой для большинства феноменологических моделей, описывающих распространение загрязняющих веществ в природных дисперсных средах [2]. В одномерном случае уравнение конвективной диффузии имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где $C(x, t)$ – концентрация загрязняющего вещества; x – пространственная координата; t – время; v – постоянная скорость среды; D – коэффициент диффузии.

Тогда распространение концентрации загрязняющего вещества по одной оси будет ограничено условиями $x \in [0, L]$, $t \in [0, T]$, где L – длина слоя почвы; T – время моделирования. Начальная концентрация загрязняющего вещества задается локальным источником загрязнения

$$C(x, 0) = \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{\sigma^2}\right), \quad (2)$$

где x_0 – положение источника; σ – параметр, определяющий пространственную ширину источника.

Граничные условия примут следующий вид:

$$C(0, t) = 0, C(L, t) = 0. \quad (3)$$

Ключевая идея ФИНС заключается в том, что нейронная сеть не обучается на данных, а минимизирует невязку дифференциального уравнения в частных производных с условием полного соблюдения физических законов.

Архитектура физически информированных нейронных сетей

Поскольку дифференциальное уравнение (1) решается в непрерывном пространстве при отсутствии регулярной сетки, в качестве основной архитектуры ФИНС оптимально использовать полносвязную нейронную сеть – МП [5]. Такой выбор обусловлен тем, что полносвязные сети обладают свойством универсальной аппроксимации непрерывных функций; это позволяет эффективно приближать решение уравнения конвективной диффузии в пространственно-временной области. Кроме того, использование МП обеспечивает достаточную гибкость модели при относительно простой архитектуре, что особенно важно в задачах ФИНС.

Разработанная нейронная сеть включает три скрытых слоя по 64 нейрона в каждом, что обеспечивает баланс между точностью аппроксимации и вычислительной сложностью модели. Параметры сети $\theta(\mathbf{W}, \mathbf{b})$ задаются матрицами весовых коэффициентов \mathbf{W} и векторами смещений \mathbf{b} . В качестве функции активации используется гиперболический тангенс, обеспечивающий гладкость аппроксимируемой функции и ее производных, что является принципиально важным при вычислении дифференциальных операторов.

На вход сети подаются две величины – пространственная координата x и время t , на выходе получаем аппроксимированное значение концентрации $\tilde{C}(x, t)$. Данная аппроксимация используется для вычисления производных по пространству и времени с применением автоматического дифференцирования. На основе этих производных формируется невязка дифференциального уравнения (1), характеризующая степень отклонения предсказания сети от физической модели процесса переноса загрязняющего вещества.

В качестве языка программирования для создания ФИНС был выбран Python. Основная реализация сети выполнялась с использованием библиотеки PyTorch. Структура разработанной ФИНС представлена на рис. 1.

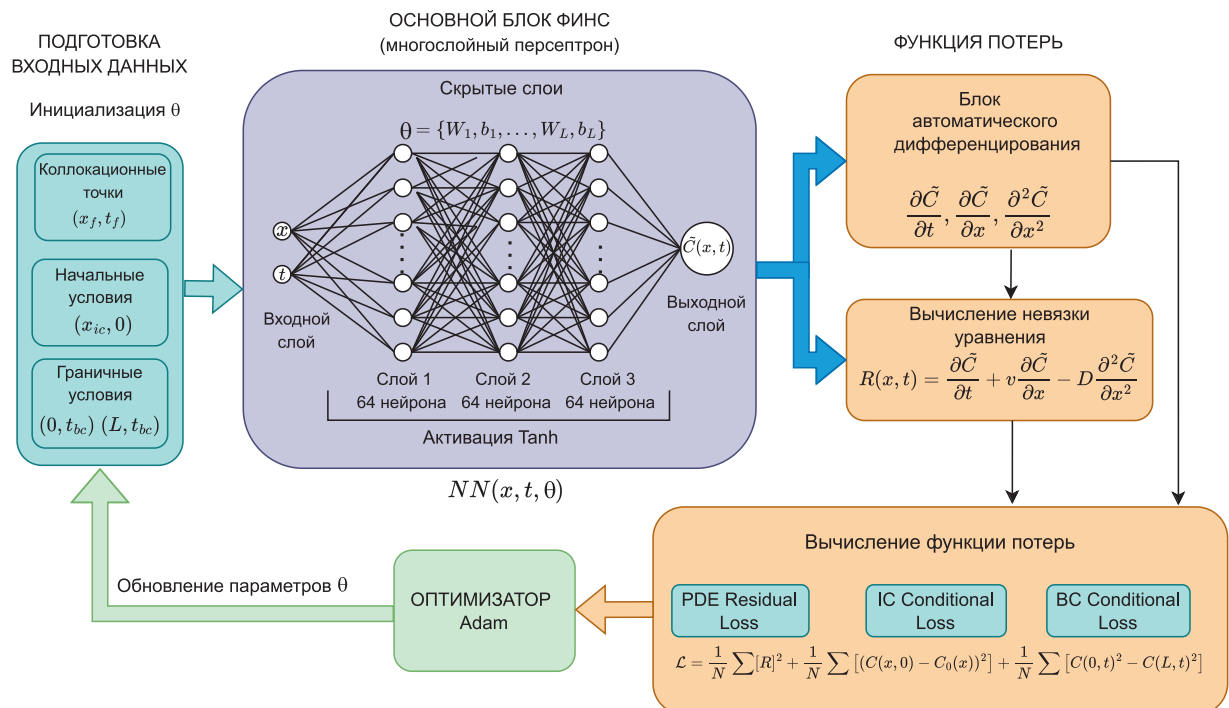


Рис. 1. Схема физически информированных нейронных сетей для решения уравнения конвективной диффузии

Fig. 1. A physically informed neural network scheme for solving the convective diffusion equation

Вычисление функции потерь

Ключевым элементом ФИНС является функция потерь, определяющая эффективность процесса обучения и качество получаемого решения. В отличие от классических нейросетевых моделей, где минимизируется ошибка на обучающей выборке, в разработанной нейронной сети минимизируются невязка дифференциального уравнения и отклонения от начальных и граничных условий. Таким образом, функция потерь формируется как сумма нескольких составляющих, каждая из которых отражает выполнение соответствующих физических требований:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{PDE} + \mathcal{L}_{IC} + \mathcal{L}_{BL}, \quad (4)$$

где \mathcal{L}_{PDE} – невязка дифференциального уравнения; \mathcal{L}_{IC} , \mathcal{L}_{BL} – ошибка выполнения начальных и граничных условий соответственно.

В разработанной ФИНС не осуществляется явное численное решение дифференциального уравнения. Вместо этого выполняется минимизация невязки уравнения в коллокационных точках N_f расчетной области. Также дополнительно минимизируются отклонения от начальных N_{IC} и граничных N_{BC} условий.

Нейронная сеть аппроксимирует значение концентрации, вычисляя значения производных через автоматическое дифференцирование, и формирует невязку $R(x, t)$, которая при идеальном решении равна нулю. Невязка рассчитывается по формуле

$$R(x, t) = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + v \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Таким образом, \mathcal{L}_{PDE} будет определяться из выражения

$$\mathcal{L}_{PDE} = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} R(x_i, t_i)^2. \quad (6)$$

Аналогичным образом рассчитываются значения функции потерь для начальных и граничных условий:

$$\mathcal{L}_{IC} = \frac{1}{N_{IC}} \sum_{i=1}^{N_{IC}} (\tilde{C}(x_i, 0) - C_0(x_i))^2; \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_{BC} = \frac{1}{N_{BC}} \sum_{i=1}^{N_{BC}} [C(0, t_i)^2 - C(L, t_i)^2]. \quad (8)$$

Итоговая функция потерь в общем виде будет выглядеть следующим образом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{N} \sum [R]^2 + \frac{1}{N} \sum [(C(x, 0) - C_0(x))^2] + \frac{1}{N} \sum [C(0, t)^2 - C(L, t)^2]. \quad (9)$$

Обучение физически информированных нейронных сетей для моделирования одномерного распространения загрязняющих веществ

На начальном этапе формируется набор точек трех типов, используемых в процессе обучения: коллокационные точки внутри области $N_f - (x_j, t_j)$; точки начальных условий $N_{IC} - (x_{ic}, 0)$; точки граничных условий $N_{BC} - (0, t_{bc})$ и (L, t_{bc}) . В обучении ФИНС не используются привычные обучающие наборы данных. Обучение строится па поиске такой функции $\tilde{C}(x, t)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению во всей области и строго соблюдает начальные и граничные условия. Обучение проходит по случайным точкам внутри области. При этом коллокационные точки расположены внутри областей $x \in (0, L)$, $t \in (0, T)$, точки для начальных условий – на линии $t = 0$, а для граничных условий – на линиях $x = 0$, $x = L$. В каждой эпохе обучения точки генерируются заново.

Каждая эпоха (шаг) обучения состоит из шести этапов: генерация коллокационных точек; прямой проход сети, где вычисляется $\tilde{C}(x, t)$; вычисление производных $\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t}$, $\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2}$; вычисление функции потерь; обратное распространение, где вычисляется $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$; обновление параметров сети (оптимизация) по алгоритму Adam [9].

Результаты исследований и их обсуждение

Эффективность работы сети оценивалась по результатам прохождения 5000 эпох обучения. В каждой эпохе генерировались точки выборки: $N_f = 1000$, $N_{IC} = 2000$, $N_{BC} = 2000$. Источник загрязнения располагался в координате $x_0 = 0,3$ шириной $\sigma = 0,05$. Входные значения области моделирования определялись параметрами $L = 1$, $T = 1$, $\nu = 1$ и $D = 0,01$. Все параметры приведены в безразмерном виде, поскольку уравнение конвективной диффузии записано в безразмерной форме, полученной путем нормировки пространственной координаты, времени t и концентрации C относительно характерных масштабов задачи.

В процессе обучения сети общее значение функции потерь уменьшилось с $1,408e+00$ на первых этапах обучения до значения $9,745e-03$ на последних. Анализ полученных решений показал, что модель корректно воспроизводит основные физические закономерности процесса переноса.

В начальный момент времени концентрация имеет выраженный локальный максимум в области расположения источника загрязнения. С течением времени наблюдается смещение максимума концентрации в направлении фильтрационного потока, что соответствует адвективному переносу вещества в пористой среде. Одновременно с этим происходит постепенное расширение пространственного профиля концентрации. Данный эффект связан с диффузионным перераспределением вещества, описываемым вторым производным членом уравнения. В результате максимальное значение концентрации уменьшается, а профиль распределения становится более сглаженным.

Полученные временные срезы распределения концентрации демонстрируют постепенное распространение загрязнения вдоль рассматриваемой области. При этом соблюдение граничных условий приводит к снижению концентрации вблизи границ области, что отражает отсутствие поступления вещества извне.

Следует отметить, что применение метода ФИНС дает возможность получить гладкое решение во всей области моделирования без необходимости использования традиционных численных схем, основанных на пространственно-временной дискретизации. Нейронная сеть аппроксимирует решение как непрерывную функцию координаты и времени, что позволяет вычислять значения концентрации в произвольных точках области. Вместе с тем нужно учитывать особенности разработанной нейронной сети. В задачах с преобладанием конвективного переноса возможны трудности при аппроксимации резких фронтов концентрации, что может приводить к сглаживанию профиля решения. Тем не менее для рассматриваемого случая модель демонстрирует стабильное и физически согласованное поведение.

Таким образом, проведенные вычислительные эксперименты подтверждают возможность применения физически информированных нейронных сетей для моделирования процессов переноса загрязняющих веществ в пористых средах. Метод может быть расширен для более сложных задач, включающих реакционные процессы, сорбцию загрязнителей в почве, а также моделирование в двух- и трехмерных областях. На рис. 2 представлен график изменения концентрации загрязняющего вещества для разных временных срезов при начальном положении источника загрязнения $x_0 = 0,3$. Согласно рисунку, при увеличении времени t максимум функции смещается, кривая становится более полой, что соответствует физическим закономерностям конвективной диффузии.

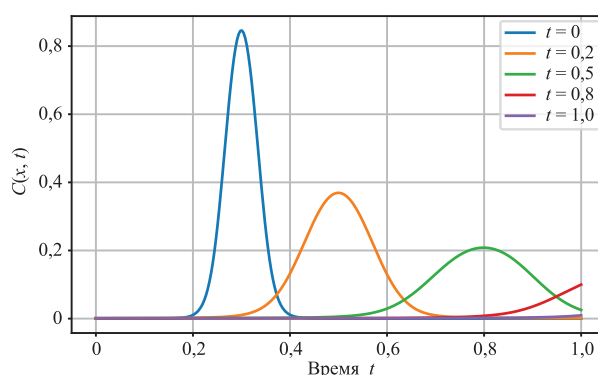


Рис. 2. Зависимость концентрации загрязняющего вещества от времени
Fig. 2. Dependence of pollutant concentration on time

Заключение

1. Разработана физически информированная нейронная сеть для решения одномерного уравнения конвективной диффузии при моделировании процесса миграции загрязняющих веществ в природных дисперсных средах. Выбраны архитектура нейронной сети, функция активации и алгоритм оптимизации, обеспечивающие устойчивость процесса обучения и требуемую точность аппроксимации решения.

2. Показаны преимущества и возможности применения физически информированных нейронных сетей для моделирования загрязняющих веществ в природных дисперсных средах. Ключевой особенностью предложенного подхода является отсутствие традиционного обучающего набора данных. Обучение сети основано на поиске функции $C(x, t)$, удовлетворяющей уравнению конвективной диффузии при выполнении начальных и граничных условий.

3. Полученные результаты демонстрируют способность физически информированных нейронных сетей воспроизводить основные закономерности процессов конвективной диффузии и обеспечивать физически согласованные решения при ограниченном объеме исходной информации. Это подтверждает их применимость в задачах экологического моделирования, где доступ к точным данным часто ограничен.

4. Дальнейшее развитие предложенного подхода связано с расширением модели на двумерные и трехмерные задачи, а также с учетом нелинейных эффектов, включая реакционные процессы и сорбцию загрязняющих веществ. Кроме того, перспективным направлением является интеграция физически информированных нейронных сетей с экспериментальными и наблюдательными данными для повышения точности прогнозирования и решения прикладных задач мониторинга окружающей среды.

Список литературы

1. Кундас, С. П. Разработка нейронных сетей для прогнозирования миграции химических веществ в почве и алгоритмов их обучения / С. П. Кундас, В. И. Коваленко, О. С. Хилько // Вестник БНТУ. 2010. № 2. С. 32–38.
2. Компьютерное моделирование миграции загрязняющих веществ в природных дисперсных средах / С. П. Кундас [и др.]. Минск: Междунар. гос. экологич. ин-т им. А. Д. Сахарова, 2011.
3. Шалькевич, П. К. Компьютерное прогнозирование пространственного распределения концентрации Cs-137 в почве / П. К. Шалькевич // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2021. Т. 65, № 2. С. 139–145. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-2-139-145>.
4. Raissi, M. Physics-Informed Neural Networks: A Deep Learning Framework for Solving Forward and Inverse Problems Involving Nonlinear Partial Differential Equations / M. Raissi, P. Perdikaris, G. E. Karniadakis // Journal of Computational Physics. 2019. Vol. 378. P. 686–707.
5. Physics-Informed Neural Networks for PDE Problems: A Comprehensive Review / K. Luo [et al.] // Artificial Intelligence Review. 2025. Vol. 58. Article 323. <http://dx.doi.org/10.1007/s10462-025-11322-7>.
6. Pre-Trained Physics-Informed Neural Networks for Analysis of Contaminant Transport in Soils / Z.-W. Ke [et al.] // Computers and Geotechnics. 2025. Vol. 180, No 11. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compgeo.2025.107055>.
7. Berardi, M. Inverse Physics-Informed Neural Networks for Transport Models in Porous Materials / M. Berardi, F. V. Difonzo, M. Icardi // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2025. Vol. 435. Article 117628. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2024.117628>.
8. Yin, R. Prediction of Soil Pollution Spatial Distribution Using Physics-Informed Neural Network Based on Spatial Probability Distribution of Pollutants / R. Yin, L. Wang, T. Hu // SSRN Electronic Journal. 2024. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4918378>.
9. Урвачев, П. М. Передовые методы оптимизации работы с нейросетями на современных архитектурах / П. М. Урвачев, В. А. Ковтун // Современные инновации, системы и технологии. 2024. Т. 4, № 4. С. 199–212. <https://doi.org/10.47813/2782-2818-2024-4-4-0199-0212>.

Поступила 31.03.2026

Принята в печать 17.04.2026

References

1. Kundas S. P., Kovalenko V. I., Khilko O. S. (2010) Development of Neural Networks for Predicting Migration of Chemical Substances in Soil and Algorithms for Their Training. *Bulletin of BNTU*. (2), 32–38 (in Russian).
2. Kundas S. P., Gishkelyuk I. A., Kovalenko V. I., Khilko O. S. (2011) *Computer Simulation of the Migration of Pollutants in Natural Dispersed Media*. Minsk, International Sakharov Environmental University (in Russian).

3. Shalkevich P. K. (2021) Computer Prediction of the Spatial Distribution of the Cs-137 Concentration in Soil. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 65 (2), 139–145. <http://dx.doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-2-139-145> (in Russian).
4. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. (2019) Physics-Informed Neural Networks: A Deep Learning Framework for Solving Forward and Inverse Problems Involving Nonlinear Partial Differential Equations. *Journal of Computational Physics. Elsevier*. 378, 686–707.
5. Luo K., Zhao J., Wang Y., Li J., Wen J., Liang J., et al. (2025) Physics-Informed Neural Networks for PDE Problems: A Comprehensive Review. *Artificial Intelligence Review. Springer*. 58, Article 323. <http://dx.doi.org/10.1007/s10462-025-11322-7>.
6. Ke Z.-W., Wei S.-J., Yao S.-Y., Chen S., Chen Y.-M., Li Y.-C. (2025) Pre-Trained Physics-Informed Neural Networks for Analysis of Contaminant Transport in Soils. *Computers and Geotechnics. Elsevier*. 180 (11). <http://dx.doi.org/10.1016/j.compgeo.2025.107055>.
7. Berardi M., Difonzo F. V., Icardi M. (2025) Inverse Physics-Informed Neural Networks for Transport Models in Porous Materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Elsevier*. 435, Article 117628. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2024.117628>.
8. Yin R., Wang L., Hu T. (2024) Prediction of Soil Pollution Spatial Distribution Using Physics-Informed Neural Network Based on Spatial Probability Distribution of Pollutants. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4918378>.
9. Urvachev P. M., Kovtun V. A. (2024) Advanced Methods for Optimizing Work with Neural Networks on Modern Architectures. *Modern Innovations, Systems and Technologies*. 4 (4), 199–212. <http://dx.doi.org/10.47813/2782-2818-2024-4-4-0199-0212> (in Russian).

Received: 31 March 2026

Accepted: 17 April 2026

Вклад авторов

Николаенко Е. А. разработала архитектуру нейронной сети, выполнила прогнозирование и обработку полученных результатов.

Шалькевич П. К. определил цель и задачи исследований, сформулировал введение и заключение, осуществил научное редактирование статьи.

Authors' contribution

Nikolaenko E. developed the neural network architecture, performed the forecasting, and processed the obtained results.

Shalkevich P. defined the purpose and objectives of the research, formulated the introduction and conclusion, and carried out scientific editing of the article.

Сведения об авторах

Николаенко Е. А., асп. каф. информационных технологий в экологии и медицине, Международный государственный экологический институт имени А. Д. Сахарова Белорусского государственного университета

Шалькевич П. К., канд. тех. наук., доц. каф. информационных технологий в экологии и медицине, Международный государственный экологический институт имени А. Д. Сахарова Белорусского государственного университета

Адрес для корреспонденции

220037, Республика Беларусь,
Минск, ул. Долгобродская, 23/1
Международный государственный экологический
институт имени А. Д. Сахарова БГУ
Тел.: +375 29 580-84-79
E-mail: nikolaenko@iseu.by
Николенко Екатерина Анатольевна

Information about the authors

Nikolaenko E., Postgraduate of Information Technologies in Ecology and Medicine Department, International Sakharov Environmental Institute of Belarusian State University

Shalkevich P., Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor of the Department of Information Technologies in Ecology and Medicine, International Sakharov Environmental Institute of Belarusian State University

Address for correspondence

220037, Republic of Belarus,
Minsk, Dolgobrodskaya St., 23/1
International Sakharov
Environmental Institute of BSU
Tel.: +375 29 580-84-79
E-mail: nikolaenko@iseu.by
Nikolaenko Ekaterina