



<http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2025-23-6-48-55>

УДК 537.612.3, 519.632

КОНСЕРВАТИВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧ МАГНИТОСТАТИКИ СО СКАЛЯРНЫМ МАГНИТНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В. В. ШЕКЕЛЕВСКИЙ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
(Минск, Республика Беларусь)*

Аннотация. Для обеспечения повышенной точности вычислений уравнений магнитостатики на границах постоянных магнитов представлен вывод их консервативной разностной схемы со скалярным магнитным потенциалом на основе интегро-интерполяционного метода. Рассмотрены особенности дискретизации дивергенции намагниченности в областях функции, имеющей разрывы первого рода. Для проверки полученной схемы разработан алгоритм, на основе которого написана программа для расчета постоянных магнитов с использованием языка программирования Python 3.11 и библиотеки Taichi. Предлагаемая схема соблюдает законы сохранения и обеспечивает высокую точность решения, что позволяет применять полученные результаты для расчета магнитных полей в технологических разрядных устройствах для формирования функциональных слоев и покрытий в микроэлектронике и оптике, а также в технических прикладных задачах, связанных с магнитной динамикой.

Ключевые слова: расчет постоянных магнитов, метод конечных разностей, скалярный магнитный потенциал, уравнение Пуассона, консервативная разностная схема.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарность. Автор выражает благодарность Д. А. Котову и Д. Б. Мигасу за помощь в обсуждении материала.

Для цитирования. Шекелевский, В. В. Консервативная разностная схема для задач магнитостатики со скалярным магнитным потенциалом / В. В. Шекелевский // Доклады БГУИР. 2025. Т. 23, № 6. С. 48–55. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2025-23-6-48-55>.

A CONSERVATIVE FINITE-DIFFERENCE SCHEME FOR MAGNETOSTATICS PROBLEMS WITH A SCALAR MAGNETIC POTENTIAL

VADZIM U. SHAKIALEUSKI

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. To enhance the accuracy of solving magnetostatic equations at permanent-magnet boundaries, we propose a conservative finite-difference scheme for the scalar magnetic potential based on the integro-interpolation method. The features of discretization of magnetization divergence in regions of a function having discontinuities of the first kind are considered. To validate the scheme, we developed an algorithm and implemented a program for computing permanent magnets using Python 3.11 and the Taichi library. The proposed scheme preserves conservation laws and ensures high computational accuracy, making the results applicable to magnetic-field calculations in technological discharge devices for the formation of functional layers and coatings in microelectronics and optics, as well as to engineering problems related to magnetic dynamics.

Keywords: calculation of permanent magnets, finite difference method, scalar magnetic potential, Poisson equation, conservative finite-difference scheme.

Conflict of interests. The author declares that there is no conflict of interests.

Gratitude. The author would like to thank D. A. Kotov and D. B. Migas for their assistance in discussing the necessary materials.

For citation. Shakialeuski V. U. (2025) A Conservative Finite-Difference Scheme for Magnetostatics Problems with a Scalar Magnetic Potential. *Doklady BGUIR*. 23 (6), 48–55. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2025-23-6-48-55> (in Russian).

Введение

Сегодня в производстве изделий микро- и нанoeлектроники для получения тонких пленок металлов и диэлектриков самыми распространенными являются ионно-плазменные устройства [1]. В частности, это магнетронные распылительные системы разных типов, где конфигурация линий индукции и величина магнитного поля имеют определяющее значение как для процесса распыления, так и для равномерного нанесения на подложку [2]. Тем не менее до сих пор нет единого подхода и четко определенной методики проектирования подобных технологических разрядных систем. В связи с этим актуально применение методов расчетного моделирования процессов плазмообразования, оказывающих основное влияние на процесс распыления, которые включают в себя расчет магнитных и электрических полей.

Чаще других применяют метод конечных элементов (МКЭ), метод конечных объемов и метод конечных разностей (МКР), которые позволяют с достаточной степенью точности приближенно решать уравнения Максвелла для расчета электрических и магнитных полей [3]. При проведении исследований автором был использован МКР для расчета задачи магнитостатики, которому в литературе уделено незаслуженно мало внимания, хотя он обладает простой реализацией, высокой вычислительной эффективностью, устойчивостью при моделировании нестационарных процессов, гибкостью в аппроксимации физических процессов, а также позволяет сразу получать значения искомых функций в узлах расчетной сетки. Особое внимание уделялось повышенной точности вычислений для уравнений магнитостатики на границах постоянных магнитов, где имеется разрыв первого рода функции намагниченности. Для решения данной проблемы рассмотрен вывод консервативной конечно-разностной схемы для уравнения магнитостатики со скалярным магнитным потенциалом на основе интегро-интерполяционного метода.

Уравнения магнитостатики для скалярного магнитного потенциала

Для описания магнитного поля в областях, где отсутствует ток, используется скалярный магнитный потенциал [4]. В этих областях магнитное поле становится потенциальным, и его можно выразить через скалярную функцию в случае наличия областей с ненулевой намагниченностью и магнитной проницаемостью, зависящей от координаты [4]:

$$\nabla \cdot (\mu(\mathbf{r}) \nabla \Psi) = \nabla \mathbf{M}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где μ – магнитная проницаемость; Ψ – скалярный магнитный потенциал; \mathbf{M} – вектор намагниченности; \mathbf{r} – радиус-вектор.

В задачах плазмодинамики, как правило, значимая величина – индукция магнитного поля \mathbf{B} , входящая в уравнение Лоренца, которая зависит от напряженности магнитного поля \mathbf{H} и вычисляется по формулам, являющимся следствием уравнений Максвелла [4]:

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{r})\mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}(\mathbf{r})), \quad \mathbf{H} = -\nabla \Psi. \quad (2)$$

Как видно из (2), для получения значений индукции магнитного поля необходимо вычислить скалярный магнитный потенциал Ψ . Рассмотрим данную задачу с применением МКР для постоянной по всему пространству магнитной проницаемости μ и функции $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, имеющей разрывы первого рода в области определения функции Ψ .

Консервативная разностная схема для скалярного магнитного потенциала

Различные физические процессы характеризуются некоторыми интегральными законами сохранения (тепла, массы, энергии и т. д.). Дифференциальные уравнения получаются исходя из уравнения баланса для малого объема в предположении существования непрерывных производных, входящих в уравнение.

В случае использования МКР происходит переход от непрерывной среды к некоторой ее дискретной модели, при которой производные заменяются их дискретными аналогами, а пространство представляет собой набор дискретных узлов [5]. При этом естественно требовать, чтобы выполнялись законы сохранения. Разностные схемы, выражающие на сетке законы сохранения, называются консервативными [5]. Получение консервативных разностных схем исходит из получения уравнений баланса для элементарных ячеек сеточной области. Входящие в эти уравнения балансы интегралы и производные заменяются приближенными разностными выражениями. Данный подход носит название интегро-интерполяционного метода [5].

Решение стационарных задач с помощью МКР сводится к добавлению в исходное уравнение фиктивной производной по времени, а выход на стационарное решение в таком случае достигается при $t \rightarrow \infty$. Данный подход называется методом релаксации или установления [5]. Рассмотрим краевую задачу для уравнения (1) с фиктивной производной по времени в двухмерном случае

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \nabla \mathbf{M}(\mathbf{r}), \quad \mu = \text{const}. \quad (3)$$

Формула (3) описывает нестационарное уравнение для скалярного магнитного потенциала. Задача (3) имеет единственное решение, если $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ – кусочно-непрерывная функция и имеет разрывы первого рода вдоль контура областей с ненулевой намагниченностью. При этом должна соблюдаться непрерывность скалярного магнитного потенциала и напряженности магнитного поля в точках разрыва.

Рассмотрим интегральное уравнение баланса энергии для каждой элементарной ячейки $\Omega_{i,j}$ площадью $\Delta x \Delta y$ уравнения (3). Оно основывается на теоремах Гаусса и Остроградского – Гаусса [5]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{\Omega_{i,j}} \Psi(x, y, t) dx dy \right) = \oint_{\partial \Omega_{i,j}} \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H} d\mathbf{S} + \iint_{\Omega_{i,j}} \nabla \mathbf{M}(\mathbf{r}) dx dy. \quad (4)$$

Для описания баланса в каждом узле необходимо преобразовать (4) в локальную форму путем деления всех частей уравнения на площадь единичной ячейки. Тогда левая часть (4) представляет собой производную от средней величины скалярного магнитного потенциала в ячейке с индексами i, j на временном шаге n

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{\Omega_{i,j}} \Psi(x, y, t) dx dy \right) \approx \frac{\partial \Psi_{i,j}^n}{\partial t} \approx \frac{\Psi_{i,j}^{n+1} - \Psi_{i,j}^n}{\Delta t}. \quad (5)$$

Правая часть уравнения (4) представляет собой выражение (2) для элементарной ячейки. При этом первое слагаемое правой части уравнения (4) является суммой потоков через все четыре грани ячейки, которые определяются как:

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y} \oint_{\partial \Omega_{i,j}} \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H} d\mathbf{S} \approx (\mathbf{H}_{i+1/2,j} \cdot \Delta y - \mathbf{H}_{i-1/2,j} \cdot \Delta y + \mathbf{H}_{i,j+1/2} \cdot \Delta x - \mathbf{H}_{i,j-1/2} \cdot \Delta x) / \Delta x \Delta y, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{H}_{i+1/2,j} = -\mu \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}}{\Delta x}; \quad \mathbf{H}_{i-1/2,j} = -\mu \frac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j}}{\Delta x}. \quad (7)$$

Вдоль другой оси расчет проводится аналогично.

Подставляя уравнения (7) в (6), получим стандартное выражение для центральной разности

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y} \oint_{\partial \Omega_{i,j}} \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H} d\mathbf{S} \approx \frac{\mu}{\Delta x^2} (\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}) + \frac{\mu}{\Delta y^2} (\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}). \quad (8)$$

Для намагниченности ситуация аналогична, за исключением того, что если все грани магнита проходят через узлы сетки, нужно учитывать процент заполнения ячейки намагниченностью на границе раздела

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_{i,j}} \nabla \mathbf{M}(\mathbf{r}) dx dy &= \oint_{\partial \Omega_{i,j}} \mathbf{M}(\mathbf{r}) d\mathbf{S} \approx \\ &\approx [\mathbf{M}_x]_{i+1/2,j} \Delta s_y - [\mathbf{M}_x]_{i-1/2,j} \Delta s_y + [\mathbf{M}_y]_{i,j+1/2} \Delta s_x - [\mathbf{M}_y]_{i,j-1/2} \Delta s_x, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Delta s_x, \Delta s_y$ – длина стороны магнита, входящей в ячейку.

Для равномерной сетки на гранях магнита $\Delta s_x = \Delta x$, $\Delta s_y = \Delta y$, а на его углах $\Delta s_x = \Delta x/2$, $\Delta s_y = \Delta y/2$ (при условии, что углы попадают в узлы сетки). По сути, вычислять выражение (9) необходимо только для узлов, принадлежащих контуру магнита. Однако нужно отметить, что аппроксимация, аналогичная (7), не будет физически корректна ввиду того, что по данным формулам за границами магнита будет ненулевой поток, что неверно. Для исправления этого необходимо приписать нулевые значения для $[M_x]_{i+1/2,j}$, $[M_x]_{i-1/2,j}$ и других, находящихся за пределами магнита. Например, для левой и правой граней прямоугольного магнита Ω_m :

$$\begin{aligned} [M_x]_{i+1/2,j} &= 0, \text{ если } [M_x]_{i+1,j} \notin \Omega_m, \text{ иначе } [M_x]_{i+1/2,j} = [M_x]_{i+1,j}; \\ [M_x]_{i-1/2,j} &= [M_x]_{i-1,j}, \text{ если } [M_x]_{i-1,j} \in \Omega_m, \text{ иначе } [M_x]_{i-1/2,j} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Для вертикальных компонент следует поступать аналогично.

Применение рассмотренной схемы для прямоугольного магнита в двухмерном случае

Пусть $\Omega \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \text{ м} \leq x \leq 1 \text{ м}; 0 \text{ м} \leq y \leq 1 \text{ м}\}$ – прямоугольная область, для которой справедливо уравнение (3). Зададим для контура расчетной области условие Дирихле $\Psi(x, y) = 0$ А, $\forall (x, y) \in \partial\Omega$. Внутри этой области находится прямоугольный магнит $\Omega_m \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0,4 \text{ м} \leq x \leq 0,6 \text{ м}; 0,4 \text{ м} \leq y \leq 0,6 \text{ м}\}$ с однородной намагниченностью вдоль оси y : $\mathbf{M}(x, y) = (0, M_0)$, $\forall (x, y) \in \Omega_m$ (где $M_0 = 10$ А/м), $\mu = 1$, $\forall (x, y) \in \Omega$.

Разобьем пространство на равные интервалы длиной Δx , Δy с числом узлов N_x , N_y так, чтобы узлы попадали на грани магнита. Координаты вдоль осей задаются как $x_i = i\Delta x$, $i = 0, 1, \dots, N_x - 1$, N_x , $y_j = j\Delta y$, $j = 0, 1, \dots, N_y - 1$, N_y , $t^{n+1} - t^n = \Delta t$, $n = 0, 1, \dots$. Пусть $N_x = N_y = 101$, тогда $\Delta x = \Delta y = 0,01$ м.

Преобразуем уравнение (3) к конечно-разностному представлению в неявной форме с фиктивной производной по времени, которую будем решать методом дробных шагов [6], когда временной интервал Δt разбивается на два равных интервала: $n \rightarrow n + 1/2 \rightarrow n + 1$:

$$\frac{\Psi_{i,j}^{n+1} - \Psi_{i,j}^n}{\Delta t} = \mu \frac{\Psi_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\Psi_{i,j}^{n+1/2} + \Psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} - \text{div} \mathbf{M}_{i,j}, \quad (11)$$

где $\Psi_{i,j}^n$, $\Psi_{i,j}^{n+1}$ – значение потенциала в момент времени n и $n+1$ соответственно.

Данная схема решается путем разбиения (11) на систему из двух уравнений, каждое из которых решается методом прогонки, что позволяет определить значения скалярного магнитного потенциала в момент времени $n+1$ [6]:

$$\frac{\Psi_{i,j}^{n+1/2} - \Psi_{i,j}^n}{\Delta t / 2} = \mu \frac{\Psi_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\Psi_{i,j}^{n+1/2} + \Psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} - \text{div} \mathbf{M}_{i,j}; \quad \frac{\Psi_{i,j}^{n+1} - \Psi_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t / 2} = \mu \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2}. \quad (12)$$

Поток намагниченности для всех узлов вычисляется по уравнениям (9), (10). Расчет напряженности магнитного поля производится исходя из центральной разности для узлов, не являющихся граничными [6]:

$$[H_x]_{i,j} = -\frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2\Delta x}; \quad [H_x]_{i,j} = -\frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2\Delta y}. \quad (13)$$

В случае, если узел является граничным, т. е. проходит по грани магнита, необходимо использовать правую или левую разность в зависимости от направления вектора нормали к поверхности ввиду наличия разрыва первого рода и неприменимости центрально-разностной аппроксимации. Правая и левая разности с порядками аппроксимации $O(h)$ и $O(h^2)$ для горизонтальной компоненты вектора \mathbf{H} [6] соответственно запишутся:

$$[H_x]_{i,j} = -\frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}}{\Delta x}; \quad [H_x]_{i,j} = -\frac{\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j}}{\Delta x}; \quad (14)$$

$$[H_x]_{i,j} = -\frac{-3\Psi_{i,j} + 4\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i+2,j}}{2\Delta x}; \quad [H_x]_{i,j} = -\frac{3\Psi_{i,j} - 4\Psi_{i-1,j} + \Psi_{i-2,j}}{2\Delta x}. \quad (15)$$

Ввиду того, что сама разностная схема (12) обладает порядком аппроксимации $O(h^2)$, аппроксимация с тем же порядком для граничных узлов (15) является более предпочтительной и будет в дальнейшем использоваться в расчетах.

Компоненты индукции магнитного поля определяются согласно (2)

$$[B_x]_{i,j} = \mu_0 \mu ([H_x]_{i,j} + [M_x]_{i,j}); [B_y]_{i,j} = \mu_0 \mu ([H_y]_{i,j} + [M_y]_{i,j}). \quad (16)$$

Оценка сходимости решения производится по максимальной норме $\|\varepsilon\|_\infty$ разницы значений потенциала на текущем и предыдущем шагах вычислений и по невязке R , определяющей отклонение численного решения от истинного [5, 6]:

$$\|\varepsilon\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y} |\Psi_{i,j}^{n+1} - \Psi_{i,j}^n|;$$

$$R_{i,j} = \left| \frac{\Psi_{i,j}^{n+1} - \Psi_{i,j}^n}{\Delta t} - \mu \frac{\Psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} - \mu \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + \text{div} \mathbf{M}_{i,j} \right|. \quad (17)$$

Результаты исследований и их обсуждение

Расчет прямоугольного постоянного магнита, заданного согласно условиям предыдущего раздела, выполнялся с помощью языка программирования Python 3.11 и библиотеки Taichi, используемой для ускорения расчетов с помощью видеокарты. На рис. 1, а для визуальной наглядности показан пример расчетной сетки, состоящей из 26×26 узлов (все дальнейшие рисунки представлены для сетки, состоящей из 101×101 узлов). Синим цветом отмечены узлы, принадлежащие магниту. Завершение итераций производилось исходя из нормы (17), которая в рассматриваемом случае задавалась как 10^{-12} . Выбор шага по времени существенно влияет на результат решения и в идеальном варианте должен быть как можно меньше. Но в таком случае число итераций будет слишком велико, что не является рациональным по затратам времени расчета. Поэтому предпочтительнее использовать переменный шаг по времени, который в рассматриваемом случае ступенчато уменьшался с увеличением числа итераций, что показано на рис. 1, б.

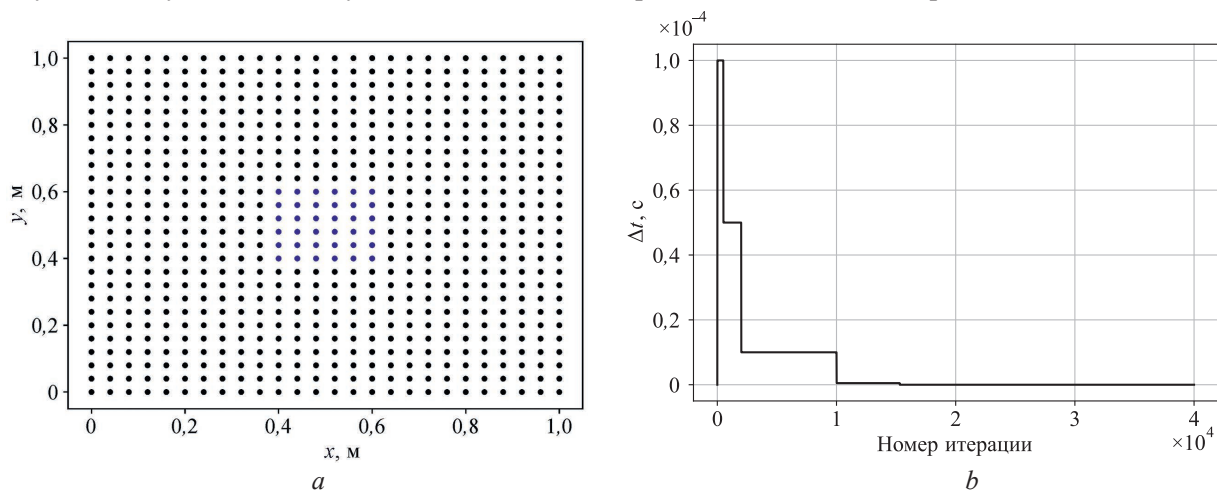


Рис. 1. Пример расчетной сетки (а) и зависимость шага по времени от номера итерации (б)

Fig. 1. An example of a computational grid (a) and the dependence of the time step on the iteration number (b)

Применение переменного шага по времени позволяет достичь лучшей сходимости с меньшей погрешностью решения. В исследуемом случае достижение сходимости наблюдалось к 15 000 шагу, при котором норма становилась меньше 10^{-12} . Время расчета – примерно 15 с. Следует отметить, что возможно применение адаптивного шага по времени – это позволяет существенно снизить число необходимых итераций до 1–2 тыс. с такой же точностью решения.

Визуализация полей нормальной компоненты намагниченности и результат расчета дивергенции намагниченности показаны на рис. 2.

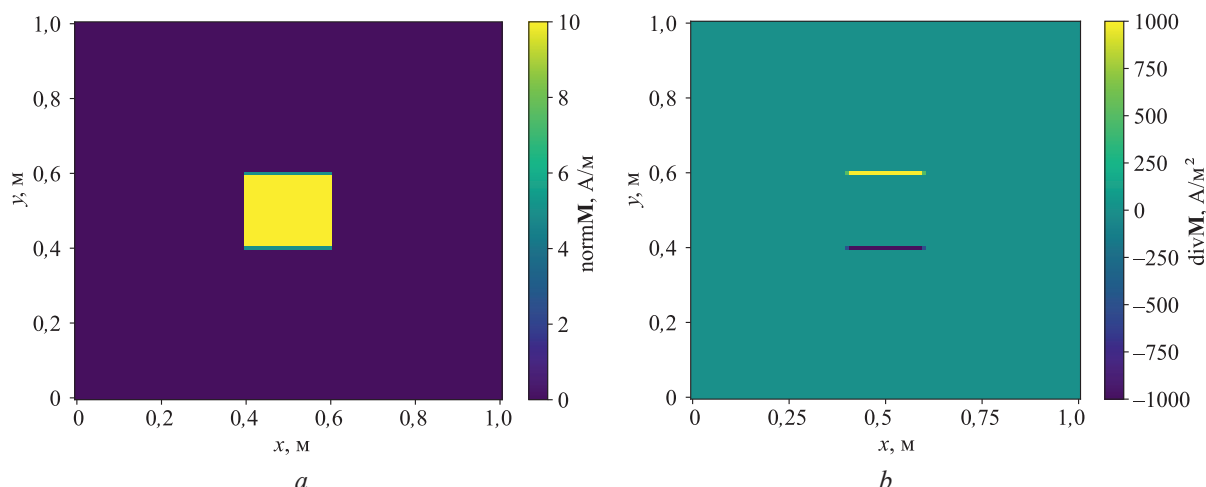


Рис. 2. Визуализация полей нормальной компоненты намагниченности (a) и результат расчета дивергенции намагниченности (b)
Fig. 2. Visualization of the fields of the normal component of magnetization (a) and the result of calculating the divergence of magnetization (b)

Следует отметить, что значения на полюсах и краях магнита в случае равномерной сетки делятся пополам для выполнения условия консервативности.

На рис. 3 показан результат расчета скалярного магнитного потенциала и нормальной компоненты напряженности магнитного поля, на рис. 4 – нормальной компоненты индукции магнитного поля и невязки для каждого узла.

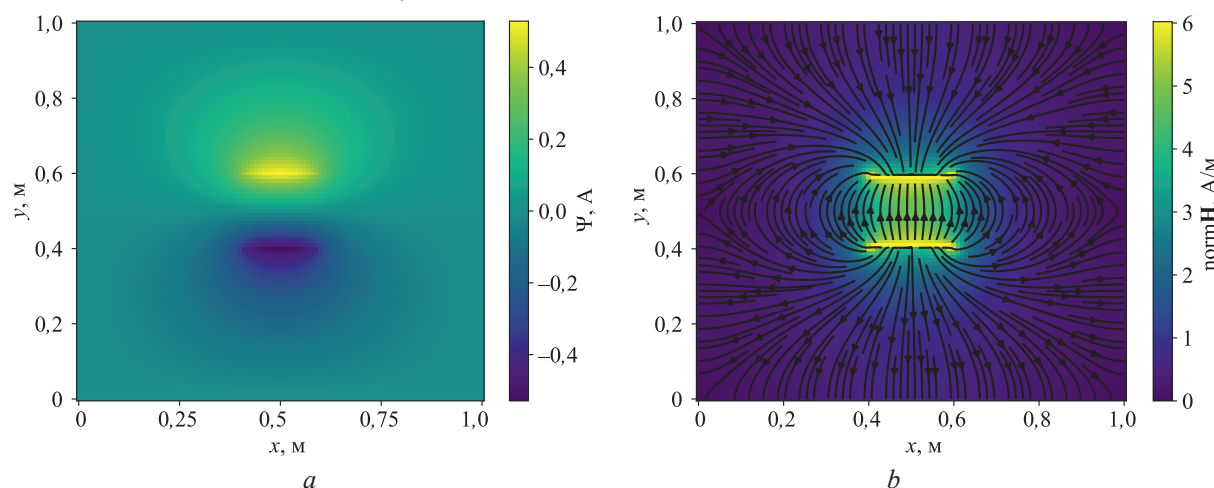


Рис. 3. Результат расчета скалярного магнитного потенциала (a) и нормальной компоненты напряженности магнитного поля (b)
Fig. 3. The result of calculating the scalar magnetic potential (a) and the normal component of the magnetic field strength (b)

Сравнение результатов расчета потенциала вдоль линий, лежащих на вертикальной и горизонтальной гранях магнита $\Psi(x; 0,6 \text{ м})$, $\forall x \in [0;1] \text{ м}$ и $\Psi(0,6 \text{ м}; y)$, $\forall y \in [0;1] \text{ м}$, с решением, полученным с помощью МКР и МКЭ, показано на рис. 5.

Из рис. 5, b видно, что невязка принимает значение меньше 0,1 для большей части расчетной области. При этом самая большая погрешность наблюдается на углах магнита, что связано с недостаточной точностью аппроксимации второй производной. Погрешность рассчитывалась по формуле

$$\Delta = \left| \frac{[\Psi_{i,j}]_{\text{МКЭ}} - [\Psi_{i,j}]_{\text{МКР}}}{[\Psi_{i,j}]_{\text{МКЭ}}} \right| \cdot 100 \%. \quad (18)$$

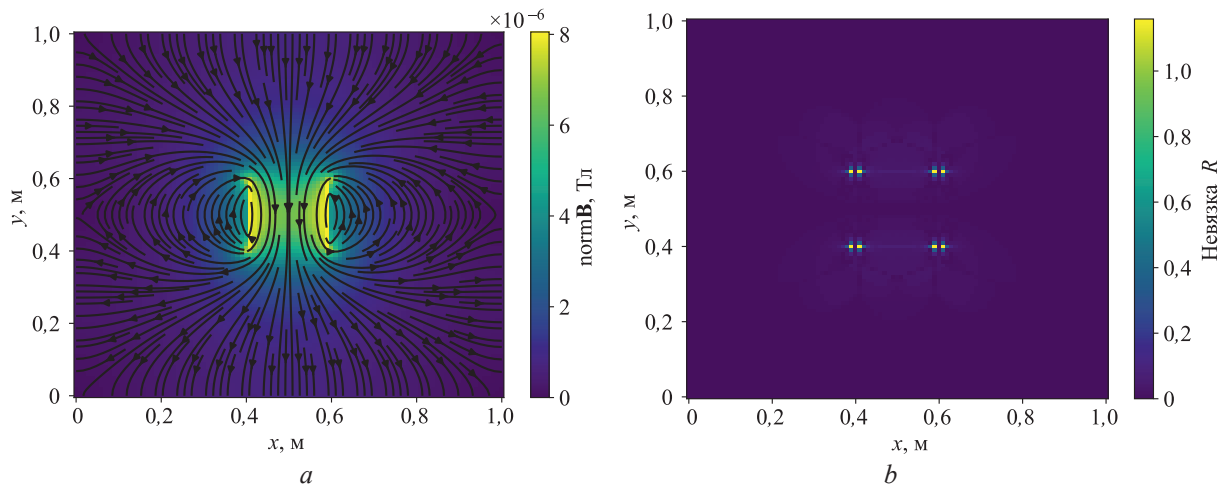


Рис. 4. Результат расчета нормальной компоненты индукции магнитного поля (a) и невязки для каждого узла (b)

Fig. 4. The result of calculating the normal component of the magnetic field induction (a) and the residual for each node (b)

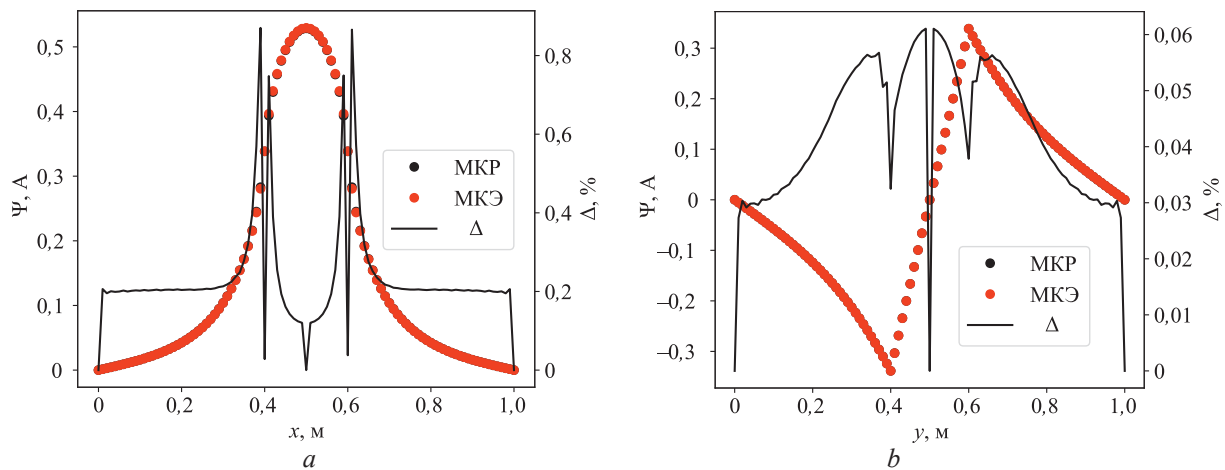


Рис. 5. Сравнение расчета потенциала с помощью метода конечных разностей

и метода конечных элементов вдоль граней магнита: $a - \Psi(x; 0,6 \text{ м}), \forall x \in [0; 1] \text{ м}; b - \Psi(0,6 \text{ м}; y), \forall y \in [0; 1] \text{ м}$

Fig. 5. Comparison of potential calculation using the finite difference method

and the finite element method along the magnet faces: $a - \Psi(x; 0.6 \text{ m}), \forall x \in [0; 1] \text{ m}; b - \Psi(0.6 \text{ m}; y), \forall y \in [0; 1] \text{ m}$

Из рис. 5 видно, что погрешность составляет менее 1 %. Наибольшая погрешность, соответствующая невязке, наблюдается на углах магнита, однако значения потенциала за пределами магнита вычисляются корректно.

Заключение

1. Для реализации расчета магнитного поля постоянных магнитов с точностью, необходимой для решения задач плазмотоники в технологических разрядных устройствах, выполнен вывод консервативной разностной схемы решения уравнения магнитостатики со скалярным магнитным потенциалом на основе интегро-интерполяционного метода.

2. С целью проверки полученной схемы была написана программа с использованием языка программирования Python 3.11 и библиотеки Taichi, в которой рассматривался пример расчета прямоугольного магнита в двухмерном случае. Расчет выполнялся с переменным шагом по времени для достижения быстрой сходимости, оценка которой производилась исходя из определения разности между истинным и численным решениями, а также из сравнения имеющегося решения с решением, полученным с помощью метода конечных элементов. Разница между истинным и численным решением для 15 тыс. итераций дала среднее значение менее 0,2 с наиболь-

шим отклонением в углах магнита, что связано с недостаточной точностью аппроксимации второй производной. Сравнение с методом конечных элементов показывает среднюю погрешность менее 1 %.

3. Полученные результаты позволяют с достаточной точностью выполнять расчет магнитных систем на постоянных магнитах технологических распылительных устройств и других компонентов оборудования для производства изделий микро- и оптоэлектроники.

Список литературы / References

1. Greene J. E. (2017) Review Article: Tracing the Recorded History of Thin-Film Sputter Deposition: From the 1800s to 2017. *J. Vac. Sci. Technol. A*. 35 (5), 1–61. <https://doi.org/10.1116/1.4998940>.
2. Golosov D. A. (2017) Balanced Magnetic Field in Magnetron Sputtering Systems. *Vacuum*. 139, 109–116. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2017.02.018>.
3. Peiró J., Sherwin S. (2005) Finite Difference, Finite Element and Finite Volume Methods for Partial Differential Equations. *Handb. Mater. Model. Springer*. 1, 2415–2446.
4. Bronzan J. B. (1971) The Magnetic Scalar Potential. *Amer. J. Phys.* 39, 1357–1359. <https://doi.org/10.1119/1.1976655>.
5. Samarskiy A. A. (1977) *Theory of Difference Schemes*. Moscow, Nauka Publishing House (in Russian).
6. Koltsova E. M., Skichko A. S., Zhensa A. V. (2021) *Numerical Methods for Solving Equations of Mathematical Physics and Chemistry*. Moscow, Yurayt Publishing House (in Russian).

Поступила 29.09.2025

Принята в печать 31.10.2025

Received: 29 September 2025

Accepted: 31 October 2025

Сведения об авторе

Шекелевский В. В., асп. каф. микро- и наноэлектроники, мл. науч. сотр. Центра междисциплинарных исследований, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,
Минск, ул. П. Бровки, 6
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
Тел.: +375 29 987-16-66
E-mail: ivadim2703@gmail.com
Шекелевский Вадим Владимирович

Information about the author

Shakialeuski V. U., Postgraduate of the Department of Micro- and Nanoelectronics, Junior Researcher at the Center for Interdisciplinary Research, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,
Minsk, P. Brovki St., 6
Belarusian State University
of Informatics and Radioelectronics
Tel.: +375 29 987-16-66
E-mail: ivadim2703@gmail.com
Shakialeuski Vadzim Uladzimiravich