



<http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2025-23-6-31-38>

УДК 539.3

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ СРЕДЫ, ИХ ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ

Д. Е. МАРМЫШ, А. С. ДАНИЛОВА

*Белорусский государственный университет (Минск, Республика Беларусь)*

**Аннотация.** Проведен анализ статистических методов, применяемых при количественной оценке показателей повреждаемости твердой деформируемой среды. К таким показателям относятся опасный объем и интегральная повреждаемость. В статье рассмотрены два алгоритма, один из которых основан на построении регулярной ортогональной сетки по потенциально повреждаемой области, второй – на применении метода Монте-Карло к вычислению кратного интеграла от функции локальной повреждаемости. Описаны алгоритмы применения каждого из подходов и проведен анализ их сходимости в зависимости от количества расчетных узлов. Функция локальной повреждаемости в каждой точке среды определялась как отношение действующих напряжений в точке к предельным напряжениям. Действующие напряжения рассчитывались методом граничных элементов. При разработке алгоритмов использовались методы параллелизации вычислений.

**Ключевые слова:** напряженное состояние, повреждаемость, опасный объем, статистические методы, метод Монте-Карло, сходимость, параллелизация.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования.** Мармыш, Д. Е. Статистические методы количественной оценки повреждаемости среды, их численная реализация и анализ сходимости / Д. Е. Мармыш, А. С. Данилова // Доклады БГУИР. 2025. Т. 23, № 6. С. 31–38. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2025-23-6-31-38>.

## STATISTICAL METHODS OF QUANTITATIVE ASSESSMENT OF MATERIAL DAMAGEABILITY, THEIR NUMERICAL IMPLEMENTATION AND CONVERGENCE ANALYSIS

DZIANIS E. MARMYSH, HANNA S. DANILAVA

*Belarusian State University (Minsk, Republic of Belarus)*

**Abstract.** An analysis of statistical methods used to quantify damageability indicators for solid deformable media is conducted. These indicators include critical volume and integral damageability. The article discusses two algorithms, one based on constructing a regular orthogonal grid over the potentially damaged region, and the other on applying the Monte Carlo method to calculating the multiple integral of the local damageability function. Algorithms for each approach are described, and their convergence is analyzed depending on the number of computational nodes. The local damage function at each point of the material was defined as the ratio of the acting stresses at the point to the ultimate stresses. The effective stresses were calculated using the boundary element method. Parallel computation methods were used in developing the algorithms.

**Keywords:** stress state, damageability, critical volume, statistical methods, Monte Carlo method, convergence, parallelization.

**Conflict of interests.** The authors declare that there is no conflict of interests.

**For citation.** Marmysh D. E., Danilava H. S. (2025) Statistical Methods of Quantitative Assessment of Material Damageability, Their Numerical Implementation and Convergence Analysis. *Doklady BGUIR*. 23 (6), 31–38. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2025-23-6-31-38> (in Russian).

## Введение

Оценка повреждаемости твердого тела (системы тел) является одной из приоритетных в современной механике деформируемого твердого тела. Адекватный анализ повреждаемости позволяет построить прогнозные модели ресурса эксплуатируемой системы, ее износа и выхода из строя, т. е. достижения своего предельного состояния. Повреждаемость можно рассчитывать как для статистического распределения полей напряжений и деформаций от действующей нагрузки, так и в динамической постановке. Большинство современных моделей повреждаемости среды стремятся ввести обобщенную скалярную величину  $\Psi$ , которая и будет количественной характеристикой, учитывающей напряженно-деформированное состояние, свойства материала, историю нагружения и проч. [1, 2].

Одной из эффективных моделей повреждаемости является концепция твердого тела с опасным объемом [3]. В статистическом варианте модели показатель повреждаемости  $\Psi$  рассчитывается как кумулятивная по опасному объему  $V$  величина локальной повреждаемости среды в расчетной точке

$$\Psi = \int_V \frac{|\sigma|}{\sigma_{\lim}} dV, \quad (1)$$

$(\sigma \geq \sigma_{\lim})$

где  $|\sigma|$  – абсолютное значение действующего напряжения в точке среды;  $\sigma_{\lim}$  – предельное значение напряжения для выбранной теории прочности.

Опасный объем в данном случае определяется по формуле

$$V = \int_V dV.$$

$(\sigma \geq \sigma_{\lim})$

Модель (1) может быть обобщена на динамический случай, когда характеристики системы зависят от времени  $t$ . Тогда, соответственно, для вычисления показателя  $\Psi$  необходимо еще взять интеграл по времени [4]

$$\Psi = \int_0^t \left( \int_V \frac{|\sigma|}{\sigma_{\lim}} dV \right) d\tau.$$

Приняв, что действующие напряжения в точке  $\sigma = f(\mathbf{r})$  можно выразить в виде функциональной зависимости от радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , опасный объем  $V$  будет объемом фигуры, ограниченной поверхностью  $\Omega$ , где  $\Omega$  определяется уравнением

$$f_{\lim}(\mathbf{r}) = \sigma_{\lim}. \quad (2)$$

Форма поверхности (2), как правило, достаточно сложная и зачастую многосвязная, рассчитать объем которой аналитически не представляется возможным [5]. Для численной оценки как опасного объема  $V$ , так и повреждаемости  $\Psi$  можно пользоваться различными статистическими подходами. В статье рассмотрены два подхода, основанные на:

- 1) построении регулярной сетки по оцениваемой повреждаемой области;
- 2) методе Монте-Карло для вероятностной оценки количественных показателей повреждаемости.

Также рассматриваются возможности параллелизации численных процедур с целью снижения машинного времени, затрачиваемого на вычисления.

## Расчет на регулярной сетке

Рассмотрим действие распределенных нормальных  $p(x)$  и касательных  $q(x)$  усилий вдоль границы полуплоскости  $y \geq 0$ . Расчет напряженного состояния полуплоскости можно провести численно-аналитическим методом граничных элементов, описанным в [6]. После определения полей напряжений можно предложить следующий алгоритм:

- 1) определение границ области  $D$ , в которой содержится поверхность  $\Omega$  ( $\Omega \subset D$ );
- 2) построение по области  $D$  ортогональной расчетной сетки с шагами  $h_x$  и  $h_y$  соответственно вдоль каждой из координатных осей;
- 3) расчет компонент тензора напряжений  $T_\sigma(A_k)$  в каждой точке  $A_k$  расчетной сетки, являющейся центром прямоугольника со сторонами  $h_x$  и  $h_y$ ;
- 4) определение количества точек  $N$ , в которых действующие напряжения превышают предельные.

Опасный объем  $V$  и интегральная повреждаемость  $\Psi$  рассчитываются по формулам:

$$V = N \frac{h_x h_y}{V_D};$$

$$\Psi = \sum_{k=1}^N \frac{\sigma(A_k)}{\sigma_{\lim}} h_x h_y, \quad (3)$$

где  $V_D$  – объем (площадь) области  $D$ .

Чем точнее необходимо получить величины повреждаемости, тем более детальную гранично-элементную и расчетную сетку по области  $D$  следует строить.

Для оценки работы вышеописанного алгоритма по определению повреждаемости на регулярной сетке было взято распределение нормальных усилий  $p(x) = p_0 \sqrt{1 - x^2/a^2}$ . Касательные усилия определялись по закону Кулона  $q(x) = fp_0 \sqrt{1 - x^2/a^2}$  с коэффициентом трения  $f = 0,5$ .

На рис. 1 и 2 представлены соответственно графики сходимости вычислительных процессов по оценке опасного объема  $V$  и интегральной повреждаемости  $\Psi$  по эквивалентным напряжениям

$$\sigma_{eqv} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2},$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения.

В качестве предельного значения, ограничивающего опасную область по эквивалентным напряжениям, взято  $\sigma_{\lim}^{eqv} = 0,27 p_0$ . На рис. 1, 2 значения опасного объема и повреждаемости отнесены к величине действующей полной нагрузки

$$P = \int_{-a}^a [p(x) + q(x)] dx = \frac{3\pi p_0 a}{2}.$$

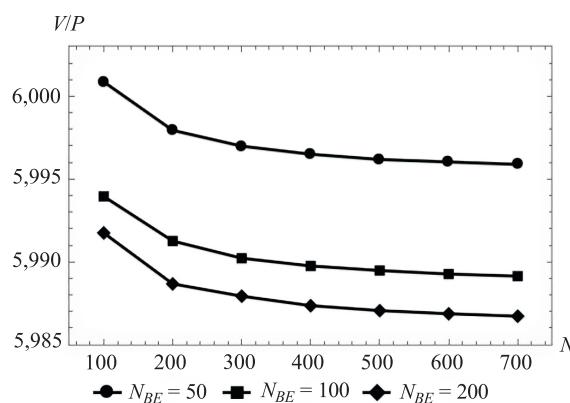


Рис. 1. Зависимость опасного объема от количества расчетных узлов

Fig. 1. Dependence of the dangerous volume on the number of calculation nodes

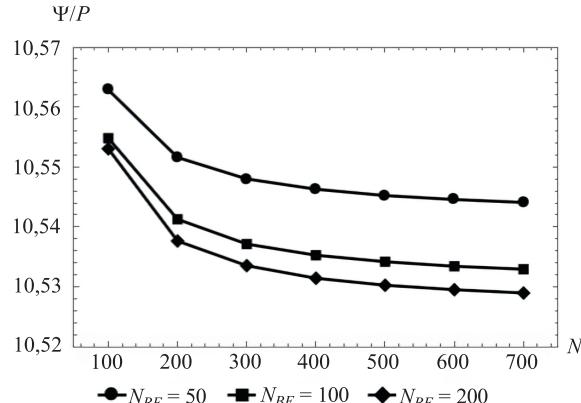


Рис. 2. Зависимость интегральной повреждаемости от количества расчетных узлов

Fig. 2. Dependence of integral damage on the number of calculation nodes

С целью изучения вопроса сеточной сходимости расчет компонент тензора напряжений проводился методом граничных элементов с разбиением отрезка распределения нагрузки на  $N_{BE} = 50$ ,  $N_{BE} = 100$  и  $N_{BE} = 200$  элементов. Из рис. 1, 2 видно, что с увеличением количества расчетных узлов  $N$  вдоль каждой из осей, т. е. при уменьшении шагов сетки  $h_x$  и  $h_y$ , показатели опасного объема и интегральной повреждаемости стремятся к своим стационарным значениям. В расчетах приняты равные значения шагов сетки по обеим осям, т. е.  $h_x = h_y$ .

Следует отметить, что для всех трех случаев разбиения на граничные элементы значения как опасного объема, так и интегральной повреждаемости при количестве расчетных узлов 200 и 700 отличаются между собой на 4,5 %. Таким образом, при количественной оценке повреждаемости на регулярной сетке не имеет смысла построение большого количества расчетных узлов.

Согласно вышеописанному алгоритму, как расчет напряжений, так и анализ показателей повреждаемости по формулам (3) проводится независимо в каждой точке среды. В этом состоит преимущество метода граничных элементов и формул (3), которое позволяет применять параллелизацию вычислительных процедур, например, с использованием технологии CUDA [7–9]. При проведении исследований также применялись способы параллелизации вычислительных потоков. Зависимости коэффициентов ускорения вычислительных процедур при количественной оценке повреждаемости среды по эквивалентным напряжениям и максимальным главным напряжениям приведены на рис. 3. Коэффициент ускорения вычислительных процессов рассчитывался по формуле

$$k = \frac{t_{\text{nonp}}}{t_p}, \quad (4)$$

где  $t_{\text{nonp}}$ ,  $t_p$  – машинное время, затрачиваемое на совершение вычислительных процедур при одних и тех же входных параметрах с использованием последовательного счета и параллелизации соответственно.

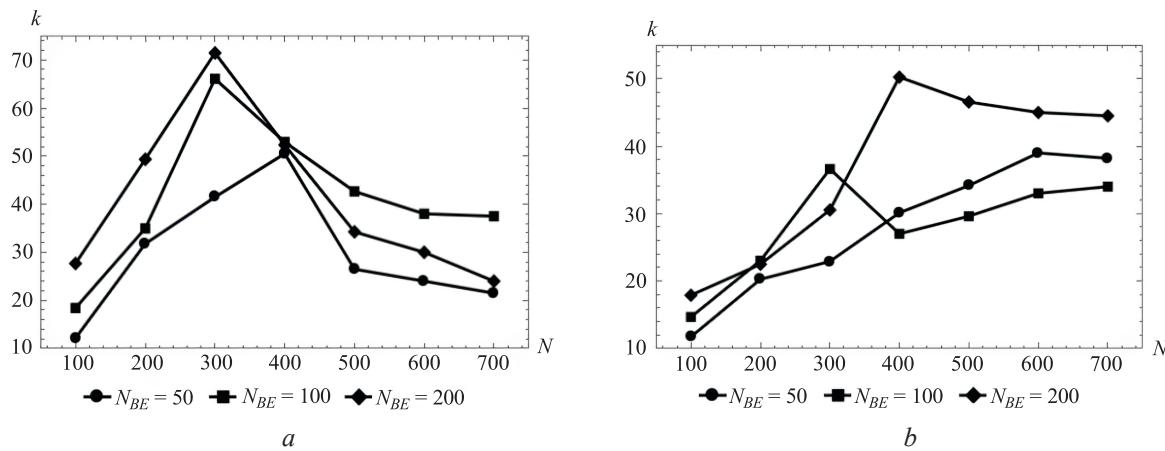


Рис. 3. Зависимость коэффициента ускорения оценки повреждаемости:  
a – по эквивалентным напряжениям; b – по максимальным главным напряжениям

Fig. 3. Damage assessment acceleration factor dependence:  
a – by equivalent stresses; b – by maximum principal stresses

Из рис. 3 видно, что параллелизация вычислительных потоков сокращает машинное время в десятки раз, позволяя эффективно использовать имеющиеся ресурсы.

### Расчет методом Монте-Карло

Оценка величины опасного объема и интегральной повреждаемости (1) может быть произведена методом Монте-Карло, когда расчетные узлы генерируются случайным образом из выделенной области. Для генерации координат можно использовать заранее определенное распределение случайной величины (например, равномерное, нормальное, распределение Пуассона и т. д.). В исследовании использовалось равномерное распределение случайной величины по двумерной области  $D$ , в которой содержалась поверхность  $\Omega$ , ограничивающая опасный объем  $V$ .

Теоретические основы метода Монте-Карло и их применение при решении различных прикладных задач описаны в [10]. Применительно к интегрированию функции метод Монте-Карло приводит к численной оценке интеграла

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\mathbf{x}^{(n)}) = \int_{H^r} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{r} f(u_1, \dots, u_r) \prod_{j=1}^r du_j, \quad (5)$$

где  $f(\mathbf{x}) = f(u_1, u_2, \dots, u_r)$  – функция, заданная на единичном гиперкубе  $H^r = [0,1]^r$ .

Общий алгоритм количественной оценки величин опасного объема и интегральной повреждаемости твердой деформируемой среды описан в [11]. Как и для расчета на регулярной сетке, рассмотрим эллиптическое распределение нормальных  $p(x) = p_0 \sqrt{1-x^2/a^2}$  и касательных усилий  $q(x) = fp_0 \sqrt{1-x^2/a^2}$  вдоль границы твердой деформируемой полуплоскости.

На рис. 4 представлены зависимости сходимости численных процедур при расчете опасного объема и интегральной повреждаемости методом Монте-Карло в зависимости от количества расчетных узлов  $N$ . Для каждого значения случайным образом генерировалось 10 выборок из  $N$  координат, по которым рассчитывались напряжения и, соответственно, показатели повреждаемости. Итоговые значения опасного объема и интегральной повреждаемости усреднялись по 10 величинам. Как видно из рис. 4, при увеличении количества расчетных узлов показатели стремятся к своим стационарным значениям и уже при  $N = 30 \cdot 10^4$  дают удовлетворительные результаты. Сравнивая результаты рис. 1, 2, 4, можно отметить, что метод расчета на регулярной сетке и расчет методом Монте-Карло приводят к одинаковым показателям опасного объема и интегральной повреждаемости.

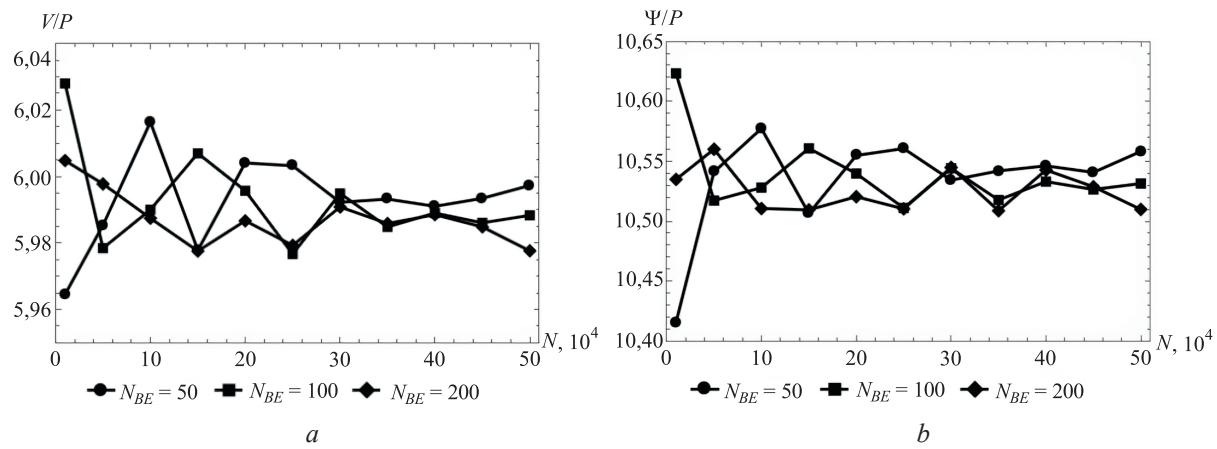
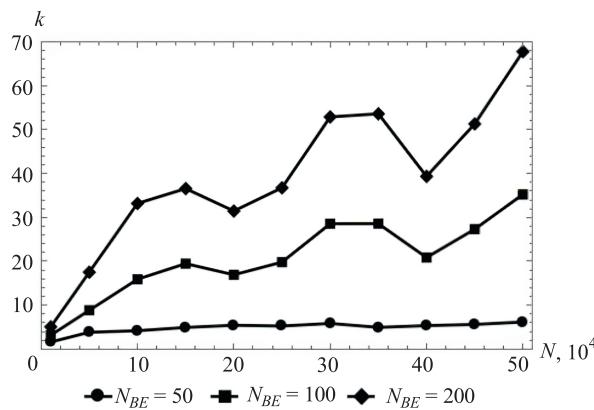


Рис. 4. Сходимость метода Монте-Карло при расчете: *a* – опасного объема; *b* – интегральной повреждаемости

Fig. 4. Convergence of the Monte Carlo method in calculating: *a* – dangerous volume; *b* – integral damage

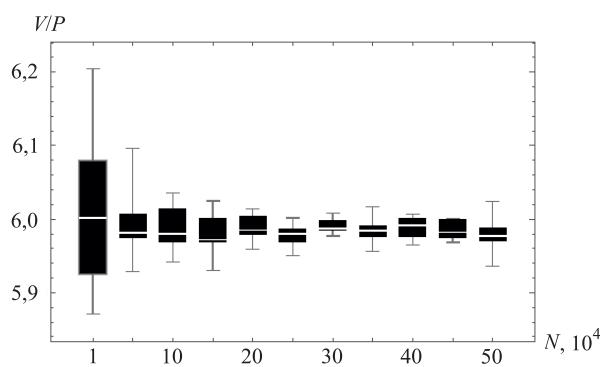
Преимуществом метода Монте-Карло является его относительная простота в алгоритмизации и оценке результатов. Численная оценка интеграла по формуле (5) имеет медленную сходимость, порядок которой составляет  $1/\sqrt{N}$ , в то время как расчет на регулярной сетке имеет порядок сходимости  $1/N^{r+\varepsilon}$  (где  $N$  – количество расчетных узлов;  $r$  – размерность задачи (в рассматриваемом случае  $r = 2$ );  $\varepsilon$  – малое число, большее 0). Как и в расчете на регулярной сетке, оценка напряженного состояния среды методом Монте-Карло происходит в каждой точке независимо. Поэтому здесь также может быть применена параллелизация вычислений с помощью технологии CUDA, либо любые другие средства, доступные исследователю. На рис. 5 показана зависимость коэффициента ускорения от количества расчетных узлов при использовании параллелизации вычислительных потоков. Из рисунка видно, что количество производительных вычислительных процедур возрастает с увеличением числа граничных элементов, используемых при оценке напряженного состояния. Также наблюдается тренд сокращения машинного времени при параллелизации с увеличением количества расчетных узлов. Причем при использовании 200 граничных элементов коэффициент ускорения достигает значения 60 и более для количества расчетных узлов  $N = 30 \cdot 10^4$ .

Набор координат по оценке напряженного состояния и повреждаемости среды генерировался 10 раз случайным образом из равномерного распределения по двумерной области, в которой содержался опасный объем. При генерации случайной величины важно понимать устойчивость работы численных алгоритмов по оценке параметров и, соответственно, по качеству оценки показателей. На рис. 6 показана диаграмма размаха при вычислении опасного объема среды для случая разбиения отрезка распределения нагрузки на 200 граничных элементов.



**Рис. 5.** Зависимость коэффициент ускорения от количества расчетных узлов при параллелизации метода Монте-Карло

**Fig. 5.** Dependence of the acceleration coefficient on the number of computational nodes during parallelization of the Monte Carlo method



**Рис. 6.** Диаграмма размаха при вычислении опасного объема

**Fig. 6.** Boxplot diagram for calculating dangerous volume

Из рис. 6 видно, что с увеличением количества расчетных узлов для метода Монте-Карло разброс в оценке точности опасного объема снижается. Для точности оценки опасного объема при количестве расчетных узлов  $10^4$  разность между первым и третьим квартилями составляет 2,54 %, для размера выборки  $30 \cdot 10^4$  – 0,26 %. Малый разброс показателей повреждаемости позволяет сделать вывод об устойчивости численного алгоритма, основанного на методе Монте-Карло.

## Заключение

1. Представлены два алгоритмических подхода к численной оценке повреждаемости в комбинации с методом граничных элементов по расчету напряженного состояния упругой деформируемой среды. Анализ работы алгоритмов позволяет сделать утверждение об их сходимости и устойчивости, основанных на случайной генерации расчетных узлов.

2. С учетом того, что оба алгоритмических подхода используют расчет показателей повреждаемости независимо в каждой точке среды, были применены способы параллелизации вычислительных потоков. Параллелизация позволила сократить машинное время в десятки раз, тем самым повысив производительность и эффективность алгоритмов.

## Список литературы

1. Hectors, K. Cumulative Damage and Life Prediction Models for High-Cycle Fatigue of Metals: A Review / K. Hectors., W. De Waele // Metals. 2021. Vol. 11, No 2. P. 1–32. <https://doi.org/10.3390/met11020204>.
2. Fatemi, A. Cumulative Fatigue Damage and Life Prediction Theories: A Survey of the State of the Art for Homogeneous Materials / A. Fatemi, L. Yang // International Journal of Fatigue. 1998. Vol. 20, Iss. 1. P. 9–34.

3. Sosnovskiy, L. A. *Tribo-Fatigue: Wear-Fatigue Damage and Its Prediction* / L. A. Sosnovskiy // Springer. 2005.
4. Щербаков, С. С. Новая модель износа / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский // Вестник Белорусского государственного университета транспорта: наука и транспорт. 2016. № 1. С. 74–82.
5. Щербаков, С. С. Механика трибофатических систем / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский. Минск: Белор. гос. ун-т, 2011.
6. Мармыш, Д. Е. Численно-аналитический метод граничных элементов в плоской контактной задаче теории упругости / Д. Е. Мармыш // Молодежь в науке – 2012: приложение к журналу «Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі». 2013. Т. 3. С. 42–46.
7. Storti, D. *CUDA for Engineers. An Introduction to High-Performance Parallel Computing* / D. Storti, M. Yurtoglu. NY: Addison-Wesley, 2016.
8. Щербаков, С. С. Ускорение гранично-элементных расчетов с помощью графического акселератора для элементов с нелинейными функциями формы / С. С. Щербаков, М. М. Полещук // Механика машин, механизмов и материалов. 2019. № 4. С. 89–94.
9. Щербаков, С. С. Распараллеливание вычислений на графическом процессоре для ускорения гранично-элементных расчетов в механике / С. С. Щербаков, М. М. Полещук, Д. Е. Мармыш // Механика машин, механизмов и материалов. 2024. № 1. С. 80–85.
10. Rubinstein, R. Y. *Simulation and the Monte Carlo Method* / R. Y. Rubinstein, D. P. Kroese; 3<sup>rd</sup> ed. USA: Wiley, 2016.
11. Мармыш, Д. Е. Метод Монте-Карло для определения и анализа повреждаемости силовой системы / Д. Е. Мармыш, В. И. Бобоед // Доклады БГУИР. 2021. Т. 19, № 1. С. 21–29. <https://doi.org/10.35596/1729-7648-2021-19-1-21-29>.

Поступила 14.07.2025

Принята в печать 09.09.2025

## References

1. Hectors K., De Waele W. (2021) Cumulative Damage and Life Prediction Models for High-Cycle Fatigue of Metals: A Review. *Metals*. 11 (2), 1–32. <https://doi.org/10.3390/met11020204>.
2. Fatemi A., Yang L. (1998) Cumulative Fatigue Damage and Life Prediction Theories: A Survey of the State of the Art for Homogeneous Materials. *International Journal of Fatigue*. 20 (1), 9–34.
3. Sosnovskiy L. A. (2005) *Tribo-Fatigue: Wear-Fatigue Damage and Its Prediction*. Springer.
4. Shcherbakov S. S., Sosnovskiy L. A. (2016) A New Wear Model. *Bulletin of the Belarusian State University of Transport: Science and Transport*. (1), 74–82 (in Russian).
5. Shcherbakov S. S., Sosnovskiy L. A. (2011) *Mechanics of Tribo-Fatigue Systems*. Minsk, Belarusian State University (in Russian).
6. Marmysh D. E. (2013) Numerical-Analytical Boundary Element Method in a Plane Contact Problem of Elasticity Theory. *Youth in Science – 2012: Supplement to the Journal “News of the National Academy of Sciences of Belarus”*. 3, 42–46 (in Russian).
7. Storti D., Yurtoglu M. (2016) *CUDA for Engineers. An Introduction to High-Performance Parallel Computing*. NY, Addison-Wesley.
8. Shcherbakov S. S., Poleshchuk M. M. (2019) Acceleration of Boundary Element Calculations Using a Graphics Accelerator for Elements with Nonlinear Shape Functions. *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*. (4), 89–94 (in Russian).
9. Shcherbakov S. S., Poleshchuk M. M., Marmysh D. E. (2024) Parallel Computing on a GPU to Accelerate Boundary Element Calculations in Mechanics. *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*. (1), 80–85 (in Russian).
10. Rubinstein R. Y., Kroese D. P. (2016) *Simulation and the Monte Carlo Method*. USA, Wiley.
11. Marmysh D. E., Babaed U. I. (2021) Monte Carlo Method for Determining and Analysis Damage to the Power System. *Doklady BGUIR*. 19 (1), 21–29. <https://doi.org/10.35596/1729-7648-2021-19-1-21-29> (in Russian).

Received: 14 July 2025

Accepted: 9 September 2025

## Вклад авторов

Мармыш Д. Е. сформулировал задачу вычисления повреждаемости среды, разработал метод дискретизации распределенной нагрузки и применил его для вычисления напряженного состояния среды, разработал теоретические основы алгоритмов вычисления показателей повреждаемости, провел общий анализ полученных результатов.

Данилова А. С. разработала численные процедуры оценки показателей повреждаемости, основанные на построении регулярной сетки и на методе Монте-Карло, провела серии вычислений, разработала алгоритмы с использованием параллелизации вычислительных потоков.

### Authors' contribution

Marmysh D. E. formulated the problem of calculating the damageability to the environment, developed a method for discretizing the distributed load and applied it to calculate the stress state of the environment, developed the theoretical foundations of algorithms for calculating damageability indicators, and make a general analysis of the results obtained.

Danilava H. S. developed numerical procedures for assessing damageability indicators based on the construction of a regular grid and the Monte Carlo method, performed a series of calculations, and developed algorithms using the parallelization of computational flows.

### Сведения об авторах

**Мармыш Д. Е.**, канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. теоретической и прикладной механики, Белорусский государственный университет; зам. дир. Совместного института Даляньского политехнического университета и Белорусского государственного университета

**Данилова А. С.**, студ., Белорусский государственный университет

### Адрес для корреспонденции

220030, Республика Беларусь,  
Минск, просп. Независимости, 4  
Белорусский государственный университет  
Тел.: +375 29 878-69-16  
E-mail: marmyshdenis@mail.ru  
Мармыш Денис Евгеньевич

### Information about the authors

**Marmysh D. E.**, Cand. Sci. (Phys. and Math.), Associate Professor, Associate Professor at Theoretical and Applied Mechanics Department, Belarusian State University; Deputy Director of the Dalian University of Technology and the Belarusian State University Joint Institute

**Danilava H. S.**, Student, Belarusian State University

### Address for correspondence

220030, Republic of Belarus,  
Minsk, Nezavisimosty Ave., 4  
Belarusian State University  
Tel.: +375 29 878-69-16  
E-mail: marmyshdenis@mail.ru  
Marmysh Dzianis Evgenevich