



<http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2024-22-6-70-80>

Оригинальная статья  
Original paper

УДК 681.511.4

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ С ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

М. П. БАТУРА, Л. Ю. ШИЛИН, Д. П. КУКИН

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
(г. Минск, Республика Беларусь)*

*Поступила в редакцию 15.11.2024*

© Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 2024  
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2024

**Аннотация.** Представлено математическое описание импульсных систем и устройств фазовой синхронизации с использованием метода переменных состояния. Проанализирована обобщенная структурная схема импульсной системы с фазовым управлением. Предложено математическое описание процессов, протекающих в системе в следующих режимах работы – количество импульсов из цепи обратной связи и количество импульсов со входа устройства равны, частота выходного сигнала меньше заданной, а также в режиме частотного детектирования при значительном превышении частоты сигнала цепи обратной связи. Рассмотренные математические модели исследуемого класса устройств учитывают нелинейный характер систем, работающих в режиме частотного фазового детектирования, а при моделировании процессов на ЭВМ существенно сокращают время расчетов.

**Ключевые слова:** импульсные системы, устройства фазовой синхронизации, режим работы, кусочно-непрерывные математические модели.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования.** Батура, М. П. Математическое моделирование систем фазовой синхронизации с импульсной модуляцией / М. П. Батура, Л. Ю. Шилин, Д. П. Кукин // Доклады БГУИР. 2024. Т. 22, № 6. С. 70–80. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2024-22-6-70-80>.

## MATHEMATICAL MODELING OF PHASE-LOCKING SYSTEMS WITH PULSE MODULATION

MIKHAIL P. BATURA, LEONID YU. SHILIN, DMITRY P. KUKIN

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (Minsk, Republic of Belarus)*

*Submitted 15.11.2024*

**Abstract.** The paper presents a mathematical description of pulse systems and phase synchronization devices using the state variable method. The generalized structural diagram of a pulse system with phase control is analyzed. A mathematical description of the processes occurring in the system in the following operating modes – the number of pulses from the feedback circuit and the number of pulses from the device input are equal, the output signal frequency is less than the specified one is proposed, as well as the frequency detection mode with a significant excess of the feedback circuit signal frequency. The considered mathematical models of the studied class of devices take into account the nonlinear nature of systems operating in the frequency phase detection mode, and significantly reduce the calculation time when modeling processes on a computer.

**Keywords:** pulse systems, phase synchronization devices, operating mode, piecewise continuous mathematical models.

**Conflict of interests.** The authors declare no conflict of interest.

**For citation.** Batura M. P., Shilin L. Yu., Kukin D. P. (2024) Mathematical Modeling of Phase-Locking Systems with Pulse Modulation. *Doklady BGUIR*. 22 (6), 70–80. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2024-22-6-70-80> (in Russian).

## Введение

Импульсные системы и устройства фазовой синхронизации находят широкое применение в промышленности и различных областях науки и техники, так как обладают рядом неоспоримых достоинств: высокой точностью и коэффициентом полезного действия, малыми габаритами и весом, простотой схемотехнической реализации, широким диапазоном рабочих частот. Но практическое применение различных модификаций импульсных систем и устройств фазовой синхронизации невозможно без их глубокого и всестороннего исследования на основе использования математических моделей систем фазовой синхронизации (СФС) с дискретизацией по времени и уровню и применения при анализе и синтезе таких методов, в которых эти эффекты учитывались бы в полной мере. Создание таких моделей является сложной задачей, а аналитические исследования их, как правило, либо затруднены, либо вообще невозможны; поэтому высокоточные математические модели ориентированы на работу с ЭВМ. При этом возникает необходимость создания моделей с различной точностью моделирования скорости расчетов.

В настоящее время на должном уровне разработана только теория традиционных аналоговых систем и устройств фазовой синхронизации. Результаты исследований в этой области опубликованы в большом количестве статей и обобщены в ряде монографий. Что касается класса дискретных СФС, включающих импульсные системы фазовой синхронизации (ИСФС), то их теория находится лишь в стадии развития и еще далека от завершения. Хорошо изучены ИСФС с амплитудно-импульсными модуляциями первого рода (АИМ-1), цифровые и гибридные системы. В меньшей степени развита теория СФС с широтно-импульсной и частотно-импульсной модуляциями первого (ШИМ-1, ЧИМ-1) и второго рода (ЧИМ-2, ШИМ-2). Классификация этих модуляций дана в соответствии с [1–3]. Анализ нелинейных моделей проводился для систем первого порядка по приближенным моделям [4–9], системы более высокого порядка исследовались в линейном либо непрерывном варианте.

## Построение математической модели

Точные математические модели ИСФС, учитывающие нелинейности элементов системы, нелинейность модуляции, импульсные свойства системы, требуют применения сложных математических процедур и, как следствие, значительных временных затрат. Для упрощения математической модели ИСФС можно предположить, что переходные процессы в системе протекают медленно, что можно записать в виде условия медленности

$$\bar{T}_n = \bar{T}_{n-1} + \Delta\bar{T}_n, \quad (1)$$

где  $\Delta\bar{T}_n = \frac{\Delta T_n}{T_0}$ ,  $\Delta T_n \ll T_{n-1}$ ;  $T_0$  – период входного сигнала в установившемся режиме.

Выражение (1) допускает режимы, связанные с большими изменениями периода выходного сигнала системы, поэтому оно не эквивалентно условию

$$\frac{T_n - T_0}{T_0} \ll 1. \quad (2)$$

Более жесткое условие (2) предполагает квантование по времени с постоянным периодом, что справедливо при «малых» отклонениях частоты выходного сигнала от стационарного значения, и сводит модель СФС к амплитудно-импульсной системе. Если при соблюдении условия медленности пренебречь импульсным характером процессов, то математическое моделирование (ММ) СФС сводится к широко известным моделям непрерывных систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). Авторами предлагаются упрощенные кусочно-непрерывные ММ СФС с использованием метода переменных состояния, которые впервые были получены в [10, 11].

Обобщенная структурная схема ИСФС для получения упрощенной ММ приведена на рис. 1, где  $\varphi_{вх}(t)$  – начальная фаза входного сигнала;  $\varphi_{вх1}(t), \varphi_{вх2}(t), \dots, \varphi_{вхN}(t)$  – начальная фаза входного сигнала после блока делителя частоты с фиксированным коэффициентом деления (ДФКД);  $\varphi_{ос1}(t), \varphi_{ос2}(t), \dots, \varphi_{осN}(t)$  – начальная фаза сигнала цепи обратной связи;  $\varphi_{\varepsilon1}(t), \varphi_{\varepsilon2}(t), \dots, \varphi_{\varepsilonN}(t)$  – сигнал фазового рассогласования;  $\varphi_{\omega}(t)$  – начальная фаза выходного сигнала;  $\varphi_g(t)$  – начальная фаза возмущающего воздействия, приведенная к выходу устройства;  $\varphi_z(t)$  – начальная фаза выходного сигнала до появления возмущающего воздействия; ДПКД1, ДПКД2, ..., ДПКДN – делитель частоты с переменным коэффициентом деления; М1, М2, ..., MN – модуляторы входного сигнала; ЦФК1, ЦФК2, ..., ЦФКN – цепи фильтрации и коррекции; ДСУ1, ДСУ2, ..., ДСУN – дискретные сравнивающие устройства; С – суммирующее устройство; ОУ – объект управления; ПНЧ – преобразованная непрерывная часть устройства.

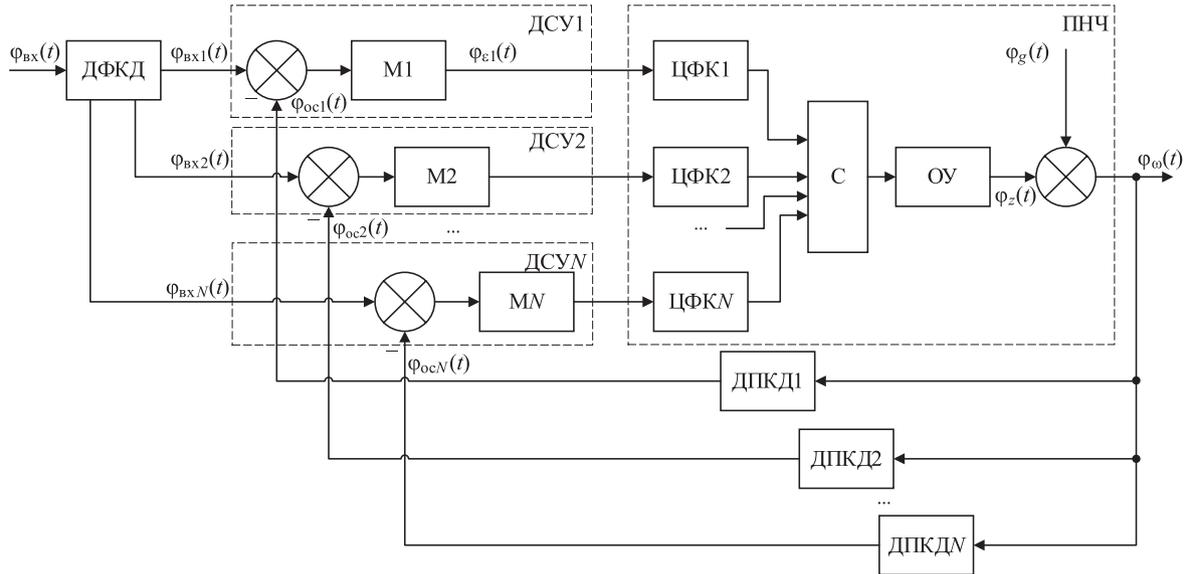


Рис. 1. Обобщенная структурная схема импульсных систем фазовой синхронизации  
Fig. 1. Generalized structural diagram of pulse phase synchronization systems

Временные диаграммы на рис. 2 поясняют принцип работы и построения математической модели ИСФС для триггерного ДСУ (a–f) и ДСУ типа «выборка-запоминание» (a, b, d, e–h). Рассмотрим основные принципы построения упрощенных математических моделей многоконтурных ИСФС, обобщенная схема которых изображена на рис. 1. Положим, что ЦФК1, ЦФК2, ..., ЦФКN, сумматор и объект управления в ПНЧ имеют передаточные функции  $W_1(p), W_2(p), \dots, W_N(p)$  вида

$$W_N(p) = \frac{Q_N(p)}{M_N(p)} = \frac{\prod_{i=m+1}^{m+r} (T_{Ni}p + 1)}{\prod_{i=1}^m (T_{Ni}p + 1)}, \quad (3)$$

где  $T_{Ni}$  – постоянная времени числителя  $Q_N(p)$  ( $i = m + 1, m + r$ ) и знаменателя  $M_N(p)$  ( $i = \overline{1, m}, r \leq m$ );  $p$  – оператор передаточной функции в преобразовании Лапласа.

Уравнения состояния ПНЧN с передаточной функцией вида (3) имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{X}_N(t) = A_N X_N(t) + B_N \varepsilon(t); \\ e_N = C_N X_N(t) + d_{0N} \varepsilon(t), \end{cases} \quad (4)$$

где  $X_N(t)$  – вектор переменных состояния;  $\varepsilon(t)$  – амплитуда управляющего импульса на рабочем периоде (рис. 2, g);  $e_N$  – модулирующая функция;  $A_N$  – матрица размерностью  $m \times m$ :

$$A_N = \text{diag} \{P_{N1}, \dots, P_{Nm}\}, P_{Ni} = \frac{1}{T_{Ni}}, i = \overline{1, m}; \quad (5)$$

$P_{Ni}$  – величина, обратная  $T_{Ni}$ ;  $B_N, C_N$  – векторы ( $B_N, C_N \in R^m$ );  $R^m$  – вещественное  $m$ -мерное пространство;  $d_{0N}$  – коэффициент:

$$\begin{aligned}
 B_{Ni} &= (b_{N1}, \dots, b_{Nm}), b_{Ni} = \frac{Q_N(p)}{M_N(p)} \mid P = P_{Ni}, i = \overline{1, m}; \\
 C_N &= (C_{N1}, \dots, C_{Nm}), C_{i1} = 1, i = \overline{1, m}; \\
 d_{0N} &= \lim W_N(p) = \begin{cases} 0, & m > r \\ \frac{\prod_{i=m+1}^{m+r} T_{Ni}}{\prod_{i=1}^m T_{Ni}}, & m = r. \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

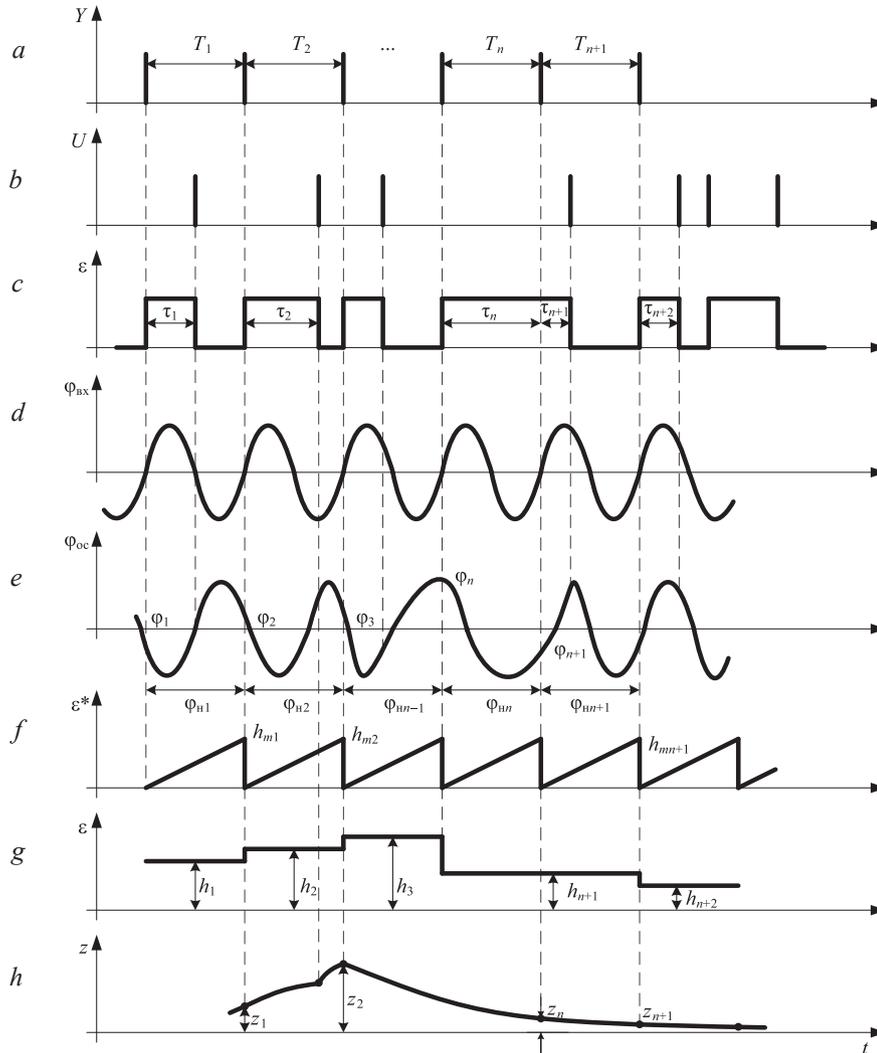


Рис. 2. Временные диаграммы импульсных систем фазовой синхронизации:

*a, b* – входной и выходной сигналы; *c* – управляющие импульсы; *d* – начальная фаза входного сигнала; *e* – фазовое изменение сигнала цепи обратной связи; *f* – характеристика фазового рассогласования; *g* – амплитуда управляющего импульса на рабочем периоде; *h* – сигнал на выходе объекта управления

**Fig. 2.** Timing diagrams of pulse phase synchronization systems: *a, b* – input and output signals; *c* – control pulses; *d* – initial phase of the input signal; *e* – phase change of the feedback circuit signal; *f* – phase error characteristic; *g* – amplitude of the control pulse during the working period; *h* – signal at the output of the control object

Решая  $N$  уравнений (4) на временном интервале  $T$ , получим систему из  $N$  уравнений разомкнутой СФС вида

$$X_N(t) = \Phi_N(t-t_0)X_N(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_N(t-\lambda)B_N\varepsilon(\lambda)d\lambda.
 \tag{7}$$

где  $t$  – время;  $t_0$  – время прихода опорного импульса;  $\Phi_N(t-t_0) = \exp[A_n(t-t_0)] = \text{diag}[\exp(P_{N1}(t-t_0)) \times \dots \times \exp(P_{Nm}(t-t_0))]$ ;  $\lambda$  – переменная интегрирования широтно-импульсной модуляцией.

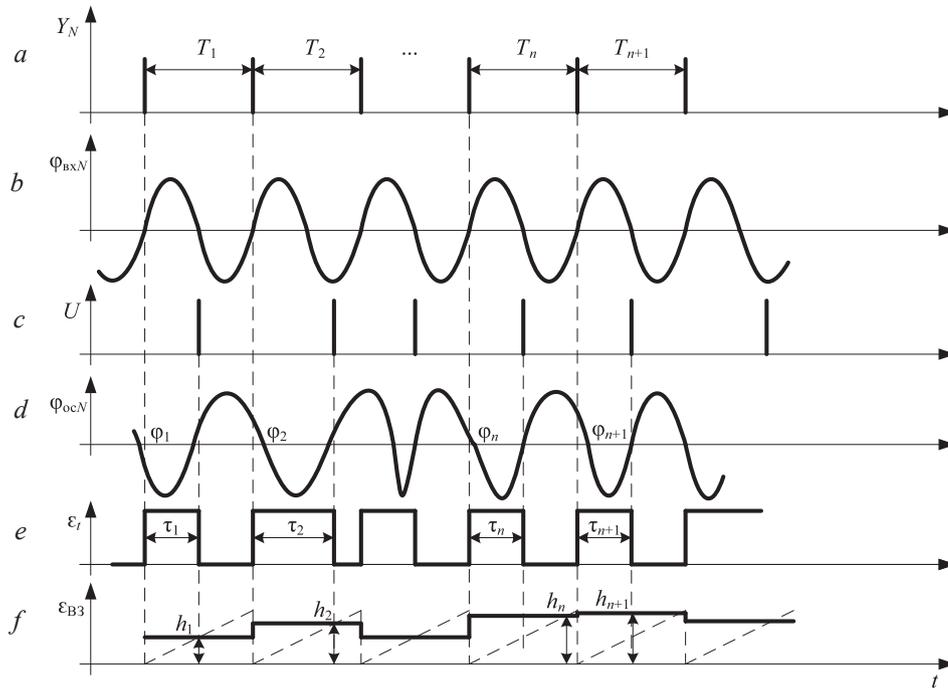
Запишем систему уравнений для триггерного фазового детектора с однополярной широтно-импульсной модуляцией, работающего по закону:

$$\varepsilon_1(t) = \begin{cases} 0, t \in [nT + \tau_n; nT + kT]; \\ h, t \in [nT + kT; nT + kT + \tau_{n+k}], \end{cases} \quad (8)$$

где  $k$  – количество импульсов входного сигнала за время  $\tau_n$ ;  $n$  – текущий номер периода;  $\tau_n, \tau_{n+k}$  – длительность двух соседних импульсов фазового рассогласования;  $h$  – амплитудное значение.

Рассмотрим три режима работы фазового детектора.

Первый – режим частотного детектирования, при котором количество импульсов из цепи обратной связи и количество импульсов со входа равны. Такой режим называется режимом синхронной работы (синхронизма) или фазового детектирования. Он является основным рабочим режимом, его временные диаграммы показаны на рис. 3.



**Рис. 3.** Временные диаграммы первого режима:  $a$  – входной сигнал  $N$ -го канала;  $b$  – начальная фаза входного сигнала  $N$ -го канала;  $c$  – выходной сигнал;  $d$  – фазовое изменение сигнала цепи обратной связи  $N$ -го канала;  $e$  – управляющие импульсы;  $f$  – амплитуда управляющего импульса на рабочем периоде

**Fig. 3.** Timing diagrams of the first mode:  $a$  – input signal of the  $N$ -th channel;  $b$  – initial phase of the input signal of the  $N$ -th channel;  $c$  – output signal;  $d$  – phase change of the signal of the feedback circuit of the  $N$ -th channel;  $e$  – control pulses;  $f$  – amplitude of the control pulse during the working period

На рис. 2,  $e$  показан сигнал, отображающий фазовое изменение сигнала цепи обратной связи. Это является абстракцией, поскольку фаза сигнала может быть определена только в моменты  $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}$ , так как этот сигнал является импульсным. Величины  $\varphi_{н1}(t), \varphi_{н2}(t), \dots, \varphi_{нn-1}(t)$  обозначают набег фаз сигнала цепи обратной связи за периоды  $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$  соответственно:

$$\begin{aligned} \varphi_{н1}(t) &= \varphi_2 - \varphi_1; \\ \varphi_{н2}(t) &= \varphi_3 - \varphi_2; \\ &\dots \\ \varphi_{нn-1}(t) &= \varphi_n - \varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

Если соблюдается условие (1) (для технических СФС оно выполняется практически всегда), то за период  $T_{n-1}$  набег фазы сигнала обратной связи составляет  $\varphi_{нn-1}(t)$  и за время  $\tau_n$  будет равен  $2\pi - (\varphi_n/N_d)$  (где  $N_d$  – коэффициент деления ДПКД). Длительность импульса  $\tau_n$  на  $n$ -такте

с учетом того, что сигнал фазового рассогласования  $N$ -го канала равен  $\varphi_{\Sigma N} = \varphi_{\text{вх}N} - \varphi_{\text{ос}N}$ , будет определяться по формуле

$$\tau_{n,N} = \frac{2\pi N_{\text{Д}} - \varphi_n}{\varphi_{\text{н}n-1}}. \quad (9)$$

Второй – режим частотного детектирования, при котором частота выходного сигнала меньше заданной (количество импульсов из цепи обратной связи меньше количества импульсов со входа). Временные диаграммы второго режима показаны на рис. 4.

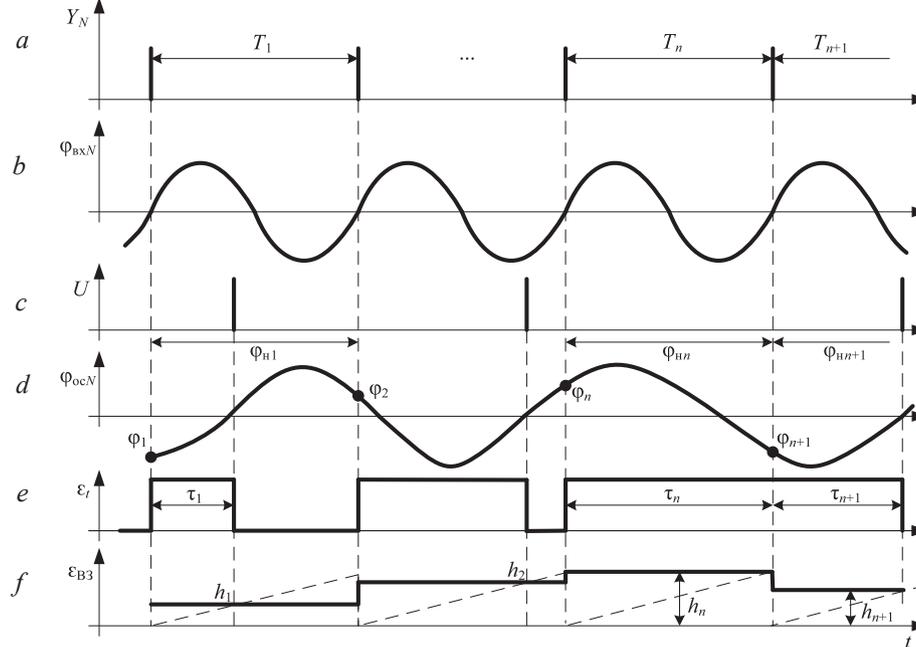


Рис. 4. Временные диаграммы второго режима:  $a-f$  – то же, что на рис. 3  
Fig. 4. Timing diagrams of the second mode:  $a-f$  – the same as in Fig. 3

Для рассматриваемого режима  $\varphi_{\text{н}n} < 2\pi N_{\text{Д}}$  или, другими словами, режим существует при выполнении следующего неравенства:

$$2\varphi_n - \varphi_{n-1} < 2\pi N_{\text{Д}N}. \quad (10)$$

В случае выполнения неравенства (10) длительность импульса  $\tau_{nN}$  равна длительности периода на данном такте квантования

$$\tau_{nN} = T_{n-1,N}. \quad (11)$$

Третий – режим частотного детектирования, при котором частота сигнала цепи обратной связи много больше частоты входного сигнала. Режим характеризуется выполнением неравенства (10), также необходимо, чтобы фаза сигнала обратной связи дважды за период входного сигнала равнялась нулю. В данном режиме длительность импульса  $\tau_n$  определяется по формуле (9). Временные диаграммы третьего режима показаны на рис. 5.

Выполнив операцию интегрирования для (7) с учетом закона модуляции (8), получим уравнения для разомкнутой системы на интервалах:

–  $[nT; nT + \tau_n]$ :

$$X_N(t) = \Phi_N(t - nT) \left( X_N(nT) + A_N^{-1} B_N h_{nN} \right) - A_N^{-1} B_N h_{nN}; \quad (12)$$

–  $[nT + \tau_n; nT + kT]$ :

$$X_N(t) = \Phi_N(t - nT - \tau_n) X_N(nT + \tau_n) = \Phi_N(t - nT) (X_N(nT) + (1 - \Phi_N(\tau_n))). \quad (13)$$

Набег фазы за период  $T_n$  определяется из уравнения

$$\varphi_{\text{н}n} = \frac{1}{N_{\text{Д}}} \left( \int_{nT}^{nT+T_n} (C_N X_N(t) + d_0 \varepsilon_N(t)) dt + \varphi_g(t) \right), \quad (14)$$

где  $\varphi_g(t)$  – начальная фаза возмущающего воздействия, приведенная к выходу устройства на периоде  $T_n$  (рис. 1).

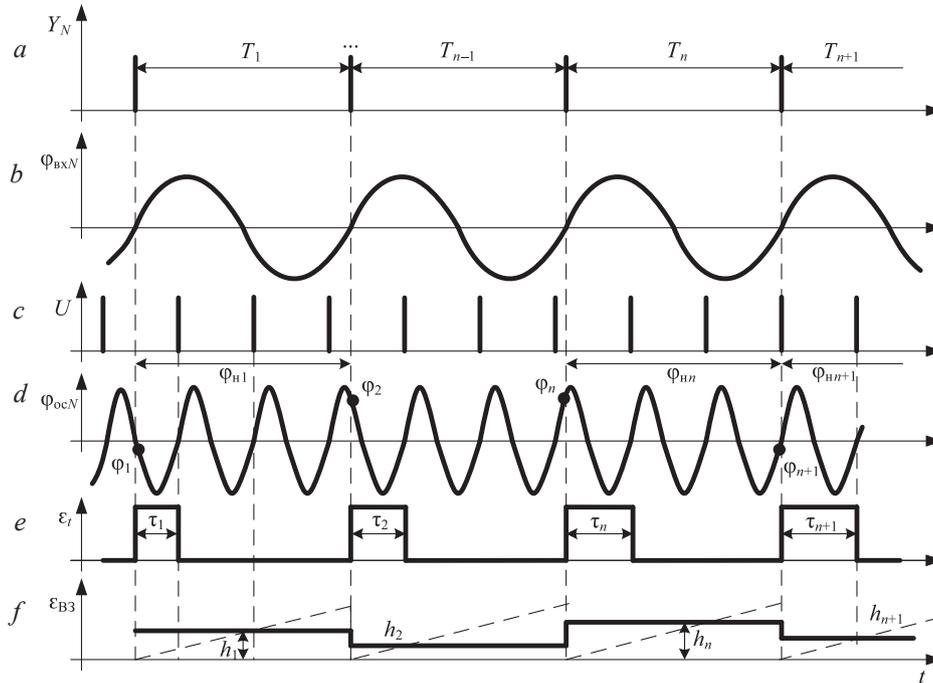


Рис. 5. Временные диаграммы третьего режима:  $a-f$  – то же, что на рис. 3

Fig. 5. Timing diagrams of the third mode:  $a-f$  – the same as in Fig. 3

После определения набег фазы на периоде  $T_n$  можно рассчитать значение начальной фазы сигнала в момент  $t = nT + T_n$

$$\varphi_{n+1,N} = \varphi_{n,N} + \varphi_{\text{нн}}. \quad (15)$$

Выходная фаза исследуемого устройства

$$\varphi_{\text{вн}} = \varphi_{\text{нн}} + \varphi_{\text{гн}}. \quad (16)$$

Поскольку в СФС выходной координатой является частота (хотя настоящая математическая модель может работать только в координатах фазы), необходимо определить значение выходного сигнала из следующего уравнения:

$$w_n = \frac{\varphi_{\text{нн}} + \varphi_{\text{гн}}}{T_n}. \quad (17)$$

Установившийся режим характеризуется постоянством выходной координаты  $\varphi_{\text{вн}}$ ,  $w_n$ , неизменностью длительности импульсов  $\tau_n$ ,  $\tau_{n+1}$ , набегам фаз  $\varphi_{\text{нн}}$ ,  $\varphi_{\text{нн}+1}$  и т. д. Таким образом, в установившемся режиме в математической модели существуют следующие координаты:

$$\varphi_{\text{вн}} = \varphi_{\text{нн}+1} + \varphi_w^*; \quad (18)$$

$$\tau_{n+1} = \tau_n = \tau^*; \quad (19)$$

$$\varphi_{\text{нн}} = \varphi_{\text{нн}+1} + \varphi_{\text{н}}^*; \quad (20)$$

$$T_n = T_{n+1} = T^*. \quad (21)$$

В рассмотренной математической модели для АИМ-1 параметр  $h_n$  является неизменным на периоде квантования, для АИМ-2  $h_n = h_n(t)$ . Если ИСФС работает с фазовым детектором типа выборка-запоминание, то математическая модель системы для однополярной модуляции (9) будет иметь вид (12)–(21) и неравенств (10), (11). Также модель необходимо дополнить уравнением амплитуды импульса на рабочем периоде (рис. 2,  $g$ )

$$h_{nN} = \frac{h_{\text{мн}} \tau_{nN}}{T_n}.$$

Уравнения состояния имеют вид (4). Решение  $N$  уравнений (4) на периоде квантования  $T$  дает систему  $N$ -го порядка вида (7). Интегрируя (7) для триггерного фазового детектора с учетом определения  $\varepsilon(t)$ , из выражения

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} h(t), & t \in [nT; nT + \tau_n]; \\ -h(t), & t \in [nT + \tau_n; nT + kT]; \\ h(t), & t \in [nT + kT; nT + kT + \tau_{n+k}] \end{cases}$$

получим систему уравнений:

$$\begin{cases} X_{1,n+1} = X_{1,n} + 2K_1\tau_n h_{nN}; \\ \dots \\ X_{k,n+1} = X_{k,n} e^{-T_n/T_k} + C_2 h_{nN} T_2 e^{-T_n/T_k} \left( 2e^{T_n/T_k} - e^{T_n/T_k} - 1 \right), \end{cases} \quad (22)$$

где  $C_2-C_k$  – величины, определяемые из передаточной функции непрерывной линейной части (НЛЧ) системы вида:

$$W(p) = \frac{K_1(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1) \cdot (T_3 p + 1) \cdot \dots \cdot (T_k p + 1)};$$

$$C_k = \frac{Q(p)}{M'(p)} \Big|_{p=p_k}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Выходная координата определяется по формуле

$$w_{n+1} = z_{n+1} + g_{n+1} = X_{1,n+1} + \sum_{k=1}^m X_{k,n+1} + g_{n+1}. \quad (23)$$

На интервале  $t \in [nT; nT + \tau_n]$  рассчитывается величина набега фазы выходного сигнала (рис. 6, е) из выражения

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{нн}} = & \frac{1}{N_{\text{Д}}} \left( \left( X_{1,n} + 2K_1\tau_n h_{nN} - \sum_{k=1}^m C_k h_{nN} T_k \right) T_n \right) - \frac{K_1 h_{nN} T_n^2}{2} - \\ & - \sum_{k=1}^m \left( T_k \left( e^{-T_n/T_k} - 1 \right) \left( C_k h_{nN} T_k \left( 2e^{T_n/T_k} - 1 \right) + X_{k,n} \right) \right) + \frac{g T_n}{N_{\text{Д}}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Зная начальную фазу сигнала  $\varphi_n$  (рис. 6, е) и набег фазы на периоде  $T_n$  (24), определим начальную фазу сигнала обратной связи

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{\varphi_{\text{нн}}}{N_{\text{Д}}}. \quad (25)$$

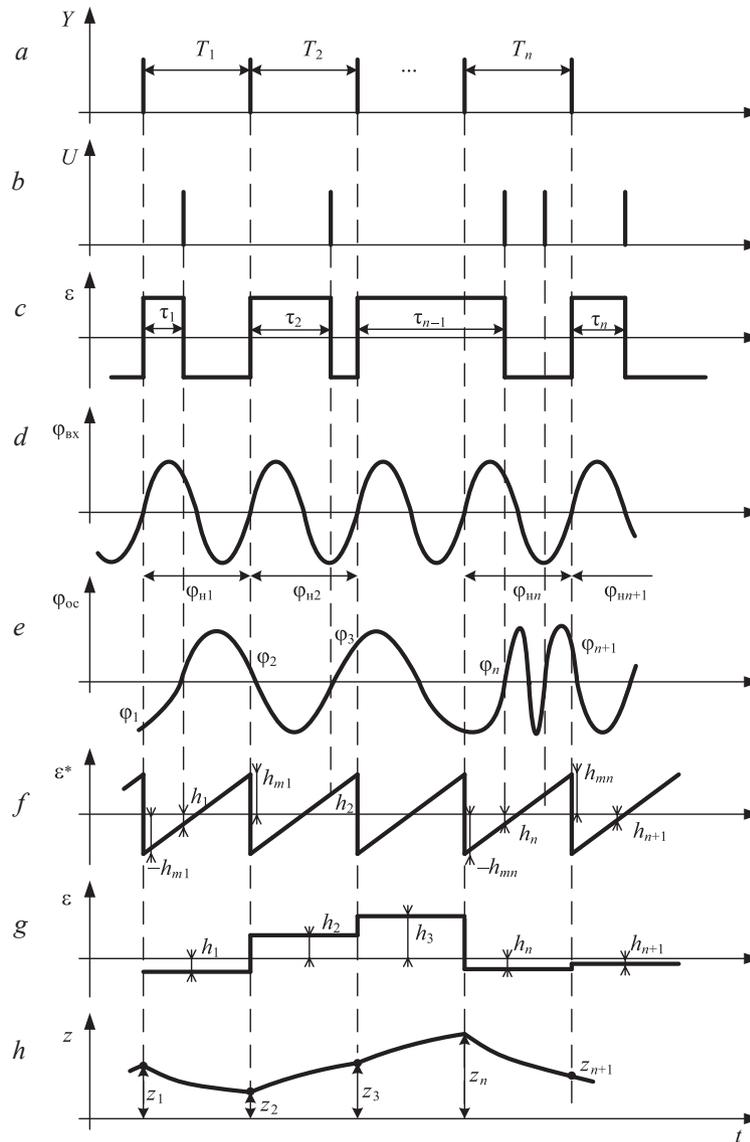
Проведем анализ режима работы фазового детектора и на его основе определим длительность импульса на  $(n + 1)$ -м периоде квантования:

$$\text{– если } N_{\text{Д}}\varphi_{n+1} + \varphi_{Nn} < 2\pi N_{\text{Д}}, \text{ то } \tau_{n+1} = T_{n+1}; \quad (26)$$

$$\text{– если } N_{\text{Д}}\varphi_{n+1} + \varphi_{Nn} > 2\pi N_{\text{Д}}, \text{ то } \tau_{n+1} = T_{n+1} \frac{(2\pi - \varphi_{n+1}) N_{\text{Д}}}{\varphi_{Nn}}. \quad (27)$$

Установившийся режим характеризуется постоянством выходной координаты  $w_{n+1}$ , неизменностью длительности импульсов  $\tau_{n+1}$ , набегом фазы  $\varphi_{\text{нн}}$  и т. д. Таким образом, в установившемся режиме имеем:

$$\dot{\tau}_n = \frac{T_n^*}{2}; \quad (28)$$



**Рис. 6.** Временные диаграммы системы фазовой синхронизации, работающей с двухполярной модуляцией: *a–h* – то же, что на рис. 2  
**Fig. 6.** Timing diagrams of a phase synchronization system operating with bipolar modulation: *a–h* – the same as in Fig. 2

$$\dot{X}_k = \frac{C_k h_{nN} T_k \left( 2e^{-T_n/2T_k} - e^{-T_n/T_k} - 1 \right)}{1 - e^{-T_n/T_k}}; \quad (29)$$

$$\dot{\phi}_H = \pi. \quad (30)$$

Уравнения (22)–(25), (28)–(30) и неравенства (26), (27) представляют собой математическую модель СФС с триггерным фазовым детектором и астатизмом второго порядка. Эта модель позволяет исследовать динамику ИСФС, определять устойчивость процессов, находить ширину полос удержания и захвата и т. п., а также является удобной для параметрического синтеза, поскольку отсутствие трансцендентного уравнения замыкания дает возможность производить расчеты на ЭВМ с экономией машинного времени от 80 до 60 % в моделях с высоким порядком передаточной функции НЛЧ. К достоинствам приведенной модели следует отнести тот факт, что для создания ММ ИСФС с фазовым детектором выборка-запоминание существующую модель

можно дополнить всего лишь одним алгебраическим уравнением, которое будет определять амплитуду импульса на очередном такте квантования:

$$h_{nN} = \left( \frac{2\tau_n - T_n}{T_n} \right) h_{nm}.$$

В установившемся режиме ИСФС с фазовым детектором типа выборка-запоминание к формулам (28)–(30) необходимо добавить уравнение  $\dot{h}_n = 0$ .

### Заключение

1. Предложены математические модели импульсных систем фазовой синхронизации, которые учитывают нелинейный характер систем, работающих в режиме частотного фазового детектирования, нелинейный и дискретный характер таких систем, являются удобными для вычислений, имеют разное время для моделирования и различную точность, а при моделировании процессов на ЭВМ существенно сокращают время расчетов.

2. Рассмотрены импульсные системы и устройства фазовой синхронизации, являющиеся обширным классом систем автоматического управления. Принцип фазовой синхронизации используется при построении устройств импульсно-фазовой автоподстройки частоты, систем с импульсно-фазовым регулированием скорости вращения вала двигателей, синтезаторов частот, систем преобразования и слежения за частотой (фазой) входного сигнала, импульсных стабилизаторов и преобразователей напряжения (тока), перестраиваемых фильтров.

3. Исследование и проектирование рассмотренных устройств сводятся, как правило, к анализу по линеаризованной модели, либо к исследованию переходных процессов в режиме фазового детектирования. Теория синтеза для данного класса систем с учетом их нелинейных свойств и свойств импульсной модуляции второго рода почти полностью отсутствует. Существующие методы линеаризации, сведения импульсных систем с модуляцией второго рода к системам с модуляцией первого рода могут привести к большим погрешностям, а в некоторых случаях – к ошибочным результатам при их анализе и синтезе. Поэтому разработка машинно-ориентированных методов анализа и синтеза импульсных систем фазовой синхронизации с учетом нелинейных характеристик и свойств импульсной модуляции второго рода является актуальной проблемой, решение которой позволит производить разработку устройств вышеназванного класса с улучшенными техническими и эксплуатационными характеристиками.

### Список литературы

1. Кунцевич, В. М. Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией / В. М. Кунцевич, Ю. Н. Чеховой. Киев: Техника, 1970.
2. Цыпкин, Я. Э. Основы теории автоматических систем / Я. Э. Цыпкин. М.: Наука, 1977.
3. Цыпкин, Я. Э. Теория нелинейных импульсных систем / Я. Э. Цыпкин, Ю. С. Попков. М.: Наука, 1973.
4. Малиновский, В. Н. Полоса захвата синтезатора частот с кольцом ИФАПЧ первого порядка / В. Н. Малиновский // Радиотехника. 1982. № 9. С. 42–44.
5. Мовшович, М. Е. Определение динамических характеристик кольца ФАП с цифровым делителем частоты методом натурального моделирования на ЦВМ / М. Е. Мовшович, М. А. Васильев // Радиотехника. 1988. № 1. С. 22–24.
6. Самойло, К. А. Определение полосы удержания и захвата системы ФАПЧ с делителем частоты / К. А. Самойло, Т. С. Федосова, Е. А. Хуртин // Известия вузов. Радиоэлектроника. 1977. № 8. С. 111–114.
7. Принципы построения математических моделей систем фазовой синхронизации / М. П. Батура [и др.] // Доклады БГУИР. 2014. № 2. С. 177–185.
8. Принципы математического описания систем фазовой синхронизации / М. П. Батура [и др.] // Матер. Междунар. науч.-техн. конф., приуроч. к 50-летию МРТИ-БГУИР, в 2 ч., г. Минск, 18–19 марта 2014 г. Минск, 2014. Ч. 1. С. 448–449.
9. Шилин, Д. Л. Анализ быстродействия импульсных систем фазовой синхронизации / Д. Л. Шилин, В. В. Пучинец, Л. Ю. Шилин // Информационные технологии и системы – 2012: матер. Междунар. науч. конф., БГУИР, г. Минск, 24 окт. 2012 г. Минск: Белор. гос. ун-т информ. и радиэлект., 2012. С. 102–103.
10. Шилин, Л. Ю. Автоматическое регулирование скорости двигателя с помощью системы импульсно-фазовой автоподстройки частоты / Л. Ю. Шилин // Комплексная автоматизация и механизация – основа повышения эффективности производства и качества работы предприятий радиоэлектроники, связи и телевидения: тез. докл. конф. Минск, 1980. С. 53–54.

11. Шилин, Л. Ю. Анализ устойчивости широтно-импульсной системы регулирования скорости при введении интегратора в цепь управления / Л. Ю. Шилин, А. П. Кузнецов // Автоматика и вычислительная техника. Минск: Вышэйш. шк., 1982. Вып. 12. С. 25–27.

### References

1. Kuntsevich V. M., Chekhov Yu. N. (1970) *Nonlinear Control Systems with Frequency and Pulse-Width Modulation*. Kyiv, Tekhnika Publ.
2. Tsyupkin Ya. E. (1977) *Fundamentals of the Theory of Automatic Systems*. Moscow, Nauka Publ.
3. Tsyupkin Ya. E., Popkov Yu. S. (1973) *Theory of Nonlinear Pulse Systems*. Moscow, Nauka Publ.
4. Malinovsky V. N. (1982) Capture Band of a Frequency Synthesizer with a First-Order PLL Ring. *Radio Engineering*. (9), 42–44.
5. Movshovich M. E., Vasiliev M. A. (1988) Determination of Dynamic Characteristics of a Phase-Locked Loop with a Digital Frequency Divider by the Method of Natural Simulation on a Digital Computer. *Radio Engineering*. (1), 22–24.
6. Samoilo K. A., Fedosova T. S., Khurtin E. A. (1977) Determination of the Hold and Capture Band of a Phase-Locked Loop System with a Frequency Divider. *News of Universities. Radio Electronics*. (8), 111–114.
7. Batura M. P., Kuznetsov A. P., Shilin L. Yu., Kukin D. P. (2014) Principles of Constructing Mathematical Models of Phase-Locked Loop Systems. *Doklady BGUIR*. (2), 177–185.
8. Batura M. P., Kuznetsov A. P., Shilin L. Yu., Kukin D. P., Shilin D. L. (2014) Principles of Mathematical Description of Phase Synchronization Systems. *Proceedings of the International Scientific and Technical Conference Dedicated to the 50<sup>th</sup> Anniversary of MRTI-BSUIR, in 2 Parts, Minsk, March 18–19*. Minsk, Part 1. 448–449.
9. Shilin D. L., Puchinets V. V., Shilin L. Yu. (2012) Analysis of the Performance of Pulse Phase-Locked Loop Systems. *Information Technologies and Systems – 2012: Proceedings of the International Scientific Conference, BSUIR, Minsk, Oct. 24*. Minsk, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics. 102–103.
10. Shilin L. Yu. (1980) Automatic Control of Engine Speed Using a Pulse-Phase Automatic Frequency Control System. *Integrated Automation and Mechanization – the Basis for Improving Production Efficiency and Quality of Work of Enterprises of Radio Electronics, Communications and Television, Conference Abstracts*. Minsk. 53–54.
11. Shilin L. Yu., Kuznetsov A. P. (1982) Analysis of the Stability of a Pulse-Width Speed Control System with the Introduction of an Integrator into the Control Circuit. *Automation and Computer Engineering*. Minsk, Higher School. Iss. 12, 25–27.

### Вклад авторов / Authors' contribution

Авторы внесли равный вклад в написание статьи / The authors contributed equally to the writing of the article.

### Сведения об авторах

**Батура М. П.**, акад. Международной академии наук высшей школы, д-р техн. наук, проф., зав. научно-исследовательской лабораторией «Новые обучающие технологии», Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (БГУИР)

**Шилин Л. Ю.**, д-р техн. наук, проф., декан факультета информационных технологий и управления, БГУИР

**Кукин Д. П.**, канд. техн. наук, доц., зав. каф. вычислительных методов и программирования, БГУИР

### Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,  
г. Минск, ул. П. Бровки, 6  
Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники  
Тел.: +375 17 293-23-46  
E-mail: kukin@bsuir.by  
Кукин Дмитрий Петрович

### Information about the authors

**Batura M. P.**, Academician of the International Academy of Higher Education Sciences, Dr. of Sci. (Tech.), Professor, Head of Research Laboratory “New Educational Technologies”, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (BSUIR)

**Shilin L. Yu.**, Dr. of Sci. (Tech.), Professor, Dean of the Faculty of Information Technology and Management, BSUIR

**Kukin D. P.**, Cand. of Sci., Associate Professor, Head of the Department of Computational Methods and Programming, BSUIR

### Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,  
Minsk, P. Brovki St., 6  
Belarusian State University  
of Informatics and Radioelectronics  
Tel.: +375 17 293-23-46  
E-mail: kukin@bsuir.by  
Kukin Dmitry Petrovich