



<http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2023-21-6-45-52>

Оригинальная статья  
Original paper

УДК 621.391.13

## МЕТОДИКА РАСЧЕТА ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМ СВЯЗИ С МНОГОПОЗИЦИОННЫМИ ВИДАМИ МОДУЛЯЦИИ И МНОГОКАСКАДНЫМ СОСТАВНЫМ КОДИРОВАНИЕМ

Э. Б. ЛИПКОВИЧ, В. В. РАБЦЕВИЧ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
(г. Минск, Республика Беларусь)*

*Поступила в редакцию 01.06.2023*

© Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 2023  
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2023

**Аннотация.** Предложены аналитические соотношения и методика расчета показателей эффективности систем связи и мультимедийного вещания, использующие многопозиционные виды модуляции (КАМ-М, ФМ-М, ЧМ-М, ЧМС-М, АМ-М, ОФМ-М) и многокаскадное последовательное кодирование на базе несистематических сверточных кодов и недвоичных блочных кодов Рида-Соломона. Полученные расчетные соотношения служат для исследований помехоустойчивости, исправляющей способности, энергетической и информационной эффективности систем в зависимости от требований к достоверности приема, формату модуляции, типу используемых кодов и их параметрам. Расчет характеристик по приведенным формулам проводится в замкнутом для анализа виде и не требует при исследовании эффективности составных кодов применения сложных процедур компьютерного моделирования.

**Ключевые слова:** помехоустойчивость, составное кодирование, эффективность декодирования.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования.** Липкович, Э. Б. Методика расчета эффективности систем связи с многопозиционными видами модуляции и многокаскадным составным кодированием / Э. Б. Липкович, В. В. Рабцевич // Доклады БГУИР. 2023. Т. 21, № 6. С. 45–52. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2023-21-6-45-52>.

## A METHOD FOR CALCULATION OF THE EFFICIENCY OF COMMUNICATION SYSTEMS WITH MULTIPLE MODULATION TYPES AND MULTI-STAGE COMPOSITE CODING

EDUARD B. LIPKOVICH, VIOLETTA V. RABTSEVICH

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (Minsk, Republic of Belarus)*

*Submitted 01.06.2023*

**Abstract.** Analytical relations and a methodology for calculating the performance indicators of communication and multimedia broadcasting systems using multi-position modulation types (QAM-M, FM-M, FM-M, CHMS-M, AM-M, OFM-M) and multi-stage coding based on non-systematic convolutional codes and non-binary block Reed-Solomon codes are proposed. The relations obtained are common for studies of noise immunity, corrective capacity, energy and information efficiency of systems, depending on the requirements for reception reliability, modulation format, type of codes used and their parameters. The calculation of the characteristics of systems with cascade composite coding is carried out in a closed form and does not require the use of complex computer simulation procedures.

**Keywords:** noise immunity, composite coding, decoding efficiency.

**Conflict of interests.** The authors declare no conflict of interests.

**For citation.** Lipkovich E. B., Rabtsevich V. V. (2023) A Method for Calculating of the Efficiency of Communication Systems with Multiple Modulation Types and Multi-Stage Composite Coding. *Doklady BGUIR*. 21 (6), 45–52. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2023-21-6-45-52> (in Russian).

## Введение

Среди множества задач, решаемых при разработке цифровых систем интерактивной связи, наземного и спутникового мультимедийного вещания, первостепенной задачей является обеспечение высокой помехоустойчивости, энергетической, спектральной и информационной эффективности. Совершенствование характеристик этих систем во многом определяется применением многопозиционных видов модуляции и канального помехоустойчивого кодирования с различными видами кодов и способами декодирования. Мощный инструмент в улучшении помехоустойчивости и энергетической эффективности – каскадное кодирование, предложенное Д. Форни [1]. Теоретические исследования каскадных кодов, как правило, проводятся для двух-каскадных конструкций численными методами компьютерного моделирования с привязкой расчетов к конкретным видам модуляции, типам и параметрам кодов. Полученные результаты исследований представляются в виде графических зависимостей или табличных значений [2]. Однако эта методика не позволяет использовать полученные результаты при других исходных данных и выполнять анализ характеристик систем в замкнутом для расчетов виде. Кроме того, проводимые исследования существенно осложняются с ростом числа каскадов, типов кодов и их соединений в кодовой конструкции. В [3] предложены аналитические модели, позволяющие в общем случае рассчитывать характеристики систем с  $N$ -каскадным сверточным кодированием (СК) и  $M$ -позиционной модуляцией.

Цель исследований авторов – разработка математических соотношений и методики расчета эффективности систем связи, использующих многопозиционные виды модуляции и составное многокаскадное кодирование на базе разнотипных по структуре сверточных и блочных кодов Рида-Соломона (РС). Предполагается, что используются гауссовский канал связи, когерентная демодуляция, идеальное перемежение/деперемежение данных, мягкое декодирование для СК и жесткое – для кодов РС.

## Расчетные модели

Основываясь на [3], в системах с  $N$ -каскадным кодированием и  $M$ -позиционной модуляцией взаимосвязь между вероятностью ошибки в информационном бите  $P_{bN}$  на выходе приемного устройства и величиной отношения сигнал/шум (ОСШ)  $h'$  на выходе демодулятора представляется в следующем виде:

$$P_{bN} = \frac{C_f \mu_{pN}}{q_f R_{pN} \alpha_{pN}} \operatorname{erfc}(\sqrt{\mu_{pN} h'}), \quad (1)$$

где  $C_f$  – параметр, зависящий от формата модуляции с  $m = \log_2(M)$  (табл. 1);  $\mu_{pN}$  – результирующая эффективность декодирования

$$\mu_{pN} = \prod_{j=1}^N \mu_{jN} = \mu_{1N} \mu_{2N} \mu_{3N} \dots \mu_{NN}; \quad (2)$$

$q_f = d_0^2 / 4E_0$  – квадрат коэффициента помехоустойчивости (табл. 1);  $d_0$  – минимальное евклидово расстояние между символами сигнального созвездия;  $E_0$  – средняя энергия сигнала, затрачиваемая на передачу бита информации;  $f$  – индекс, указывающий на принятый формат модуляции (табл. 1);  $R_{pN}$  – результирующая кодовая скорость для  $N$ -ступенчатого декодирования

$$R_{pN} = \prod_{j=1}^N R_{jN} = R_{1N} R_{2N} \dots R_{NN} = (R_1 R_2 R_3 \dots R_N)(R_2 R_3 \dots R_N) R_N = R_1 R_2^2 R_3^3 \dots R_N^N; \quad (3)$$

$h' = E_0 / N_0$  – отношение  $E_0$  к спектральной плотности мощности шума  $N_0$ ;  $\mu_{jN}$  – эффективность декодирования  $j$ -й ступени;  $R_{jN}$  – кодовая скорость  $j$ -й ступени декодирования;  $R_j = k_j / n_j$  – кодовая скорость  $j$ -го каскада кодирования, номер которого отсчитывается от модулятора в сторону

источника цифрового сигнала;  $k_j, n_j$  – число символов на входе и выходе  $j$ -го каскада кодирования;  $R_{1N} = R_K$  – кодовая скорость кодирования;  $\alpha_{pN}$  – параметр, относящийся только к сверточному кодированию при  $R_j = 1/n_j$

$$\alpha_{pN} = \prod_{j=1}^N \alpha_j, \quad \alpha_j = n_j - k_j; \quad (4)$$

$\operatorname{erfc}(Z)$  – дополнительный интеграл вероятности

$$\operatorname{erfc}(Z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_Z^{\infty} \exp(-u^2) du \cong \frac{1}{Z\sqrt{\pi}} \cdot 10^{-Z^2/2,3}. \quad (5)$$

**Таблица 1.** Расчетные формулы для определения значений  $C_f$  и  $q_f$  систем с  $M$ -позиционной модуляцией  
**Table 1.** Calculation formulas for determining values  $C_f$  and  $q_f$  for systems with  $M$ -position modulation

$f$	Вид модуляции / Modulation type	$C_f$	$q_f$
1	КАМ-М, $m = 2, 4, 6, \dots$	$C_1 = 2(\sqrt{M} - 1)/m\sqrt{M}$	$q_1 = 3m/2(M - 1)$
2	КАМ-М, $m = 3, 5, 7, \dots$	$C_2 = 2/m$	$q_2 = 3m/1,9(M - 0,5)$
3	ФМ-2 (BPSK), $m = 1$	$C_3 = 0,5$	$q_3 = 1$
4	ФМ-М, $m \geq 2$	$C_4 = 1/m$	$q_4 = m\sin^2(\pi/M)$
5	ЧМ-М, $m \geq 1$	$C_5 = M/4$	$q_5 = m/2$
6	МЧС-М, $m \geq 1$	$C_6 = 0,5$	$q_6 = m/2$
7	АМ-М, $m \geq 1$	$C_7 = (M - 1)/mM$	$q_7 = 3m/(M^2 - 1)$
8	ОФМ-М, $m = 1$	$C_8 = 0,5$	$q_8 = 0,803$
9	ОФМ-М, $m \geq 2$	$C_9 = 1/m$	$q_9 = m\sin^2(\pi/M\sqrt{2})$

С учетом (5) уравнение (1) приводится к виду

$$P_{bN} = \frac{C_f \sqrt{\mu_{pN}}}{q_f R_{pN} \alpha_{pN} \sqrt{\pi h'}} \cdot 10^{-\mu_{pN} h'/2,3}. \quad (6)$$

В системах с  $N$ -каскадным сверточным кодированием результирующая эффективность декодирования (2) определяется следующим образом:

$$\mu_{pN}^{\text{СК}} = (q_f d_{C1} \beta_{1N}^{\text{СК}} R_{1N}^{\text{СК}}) (d_{C2} \beta_{2N}^{\text{СК}} R_{2N}^{\text{СК}}) \dots (d_{CN} \beta_{NN}^{\text{СК}} R_{NN}^{\text{СК}}), \quad (7)$$

где  $d_{Cj}$  – свободное расстояние кода;  $\beta_{jN}^{\text{СК}}$  – множитель эффективности декодирования  $j$ -й ступени в зависимости от  $P_{bj}$  на ее выходе

$$\beta_{jN}^{\text{СК}} = 1 / \left[ 1 + \frac{\lg(R_{jN}^{\text{СК}} d_{Cj})}{\alpha_{jN} (-\lg P_{bj})} \right] \cdot \left[ 1 + \frac{\exp(\lg P_{bj})}{1 - R_{jN}^{\text{СК}}} \right]. \quad (8)$$

Согласно (8), величина  $\beta_{jN}^{\text{СК}}$  может изменяться от значений, близких к единице при  $P_{bj} \rightarrow 0$ , до долей единицы с ростом ошибок. Эта зависимость приводит к существенному снижению эффективности декодирования (7) отдельных ступеней и, прежде всего, первых, работающих с высоким уровнем ошибок.

В табл. 2 приведены значения  $d_{Cj}$  для сверточных кодов с  $R_j = 1/n_j$  и перфорированных кодов с  $R_j = (n_j - 1)/n_j$  в зависимости от длины кодового ограничения  $K_j$  при использовании оптимальных порождающих полиномов, определяющих структуру построения кодера. Их значения в восьмеричной форме записи для кодера с  $R_j = 1/2$  при  $K$ , равном 5, 7 и 9, составляют (37, 23), (171, 133) и (753, 561), для кодера с  $R_j = 1/3$  – (37, 33, 25), (171, 165, 133) и (557, 663, 711) соответственно. Поскольку значения  $R_j$  перфорированных кодов могут адаптивно изменяться, при использовании составного кодирования с СК можно получить большой набор кодовых скоростей. Для кодов с  $R_j = 1/3$ , согласно (4),  $\alpha_{jN} = 2$ .

**Таблица 2.** Значения свободного расстояния сверточного кода  
**Table 2.** Convolution code free distance values

$K_j$	Значение $d_{Cj}$ для $K_j$ при кодовой скорости $R_j$ / Values $d_{Cj}$ for $K_j$ at code rate $R_j$					
	1/3	1/2	2/3	3/4	5/6	7/8
5	12	8	5	4	3	2
7	15	10	7	5	4	3
9	18	12	8	6	5	4

Если кодовая конструкция строится на базе кодов РС с максимально достижимым расстоянием, то результирующая эффективность декодирования:

$$\mu_{pN}^{PC} = (q_f \beta_{1N}^{PC} (t_1 + 1) R_{1N}^{PC}) (\beta_{2N}^{PC} (t_2 + 1) R_{2N}^{PC}) \dots (\beta_{NN}^{PC} (t_N + 1) R_{NN}^{PC}), \quad (9)$$

где  $t_j = \text{int}(n_j^{PC} - k_j^{PC}) / 2$  – количество исправляемых символов  $j$ -й ступенью декодирования;  $n_j^{PC} = (2^{l_j} - 1)$  – общее число символов в кодовом слове;  $l_j$  – число бит в символе;  $k_j^{PC} = n_j^{PC} - d_{mj} + 1$  – число информационных символов;  $d_{mj} = 2t_j + 1$  – минимальное кодовое расстояние Хэмминга.

Для кодов РС выполняются условия  $1 \leq k_j^{PC} \leq (n_j^{PC} - 2)$  и  $(n_j^{PC} - 1) / 2 \geq t_j \geq 1$ . Множитель эффективности декодирования  $j$ -й ступени кода РС определяется по формуле

$$\beta_{jN}^{PC} = 1 / \left[ 1 + \frac{2 \lg(R_{jN}^{PC} d_{mj})}{-\lg P_{bj}} \right] \cdot \left[ 1 + \lg \left( \frac{t_j}{(1 - R_{jN}^{PC})(-\lg P_{bj})} \right) + \frac{R_{jN}^{PC} \exp(\lg P_{bj})}{\sqrt{2}(1 - R_{jN}^{PC})} \right]. \quad (10)$$

Анализ выражений (10) и (8) показывает, что в зоне грубых ошибок ( $P_{bj} = 10^{-2} \dots 10^{-4}$ ) множитель  $\beta_{jN}^{PC}$  заметно меньше  $\beta_{jN}^{CK}$ , и эффективность  $\mu_{jN}^{PC} \leq \mu_{jN}^{CK}$ . Поэтому использовать коды РС в первой ступени с низкой эффективностью декодирования нежелательно. В области квазибезошибочного приема значения  $\beta_{jN}^{PC}$  и  $\mu_{jN}^{PC}$  растут, что при  $(t_j + 1) \geq d_{Cj}$  обеспечивает преимущества кода РС над СК. Если в составной кодовой конструкции используется комбинация разнотипных кодов, то  $\mu_{pN}$  определяется на основании расчетов  $\mu_{jN}$  отдельных ступеней по (7) и (8) для СК, или по (9) и (10) – для кода РС.

Применив к (6) метод последовательных приближений, получим общее выражение для определения ОСШ системы с  $N$ -каскадным кодированием и  $M$ -позиционной модуляцией, при котором на выходе требуемой ступени декодирования ( $j \leq N$ ) реализуется заданная вероятность ошибки  $P_{bj}$ :

$$h'_j = \frac{2,3}{\mu_{pj}} \cdot (D_j - \lg \sqrt{2,3(D_j - V_j) / \mu_{pj}}); \quad (11)$$

$$D_j = -\lg P_{bj} + \lg(\chi_j \sqrt{\mu_{pj}}); \quad V_j = 0,5 \lg(2,3 D_j / \mu_{pj}); \quad (12)$$

$$\chi_j = C_f / (q_f \alpha_{pj} R_{pj} \sqrt{\pi}). \quad (13)$$

Согласно (11)–(13), для снижения ОСШ и, следовательно, повышения помехоустойчивости приема необходимо увеличивать  $\mu_{pj}$  и уменьшать  $D_j$ . Эти требования можно обеспечивать применением эффективных кодов, увеличением их числа в кодовой конструкции и выбором режима работы первой ступени декодирования в области грубых ошибок, исправление которых возлагается на последующие ступени. Вместе с тем по мере наращивания числа ступеней сокращается вносимый выигрыш в ОСШ каждой из них и снижается спектральная эффективность системы, что связано с уменьшением кодовой скорости и энергии в информационном символе. Поэтому в процессе формирования кодовой структуры необходимо выбирать параметры кодов и порядков их размещения в конструкции таким образом, чтобы обеспечивались максимальные значения  $R_{pN}$  (3) и  $\mu_{pN}$  (2). Это означает, что наиболее избыточный код в составной конструкции должен принадлежать первой ступени декодирования, а малоизбыточный – последней.

Если в (11)–(13) принять  $\mu_{pj} = q_f$  и учесть, что  $R_{pj} = \alpha_{pj} = 1$ , то получим формулу для расчета ОСШ в отсутствие кодирования

$$h'_0 = \frac{2,3}{q_f} \cdot (A - \lg \sqrt{2,3(A - V_0) / q_f}), \quad (14)$$

где

$$A = -\lg P_{b0} + \lg(C_f / \sqrt{q_f \pi}); \quad V_0 = 0,5 \lg(2,3A / q_f); \quad (15)$$

$P_{b0}$  – вероятность ошибки на выходе демодулятора, значение которой, согласно (6), при  $\mu_{pj} = q_f$  определяется как:

$$P_{b0} = \frac{C_f}{\sqrt{q_f \pi h'_0}} \cdot 10^{-q_f h'_0 / 2,3}. \quad (16)$$

Воспользовавшись (11)–(15), получим формулу для определения энергетического выигрыша от кодирования (ЭВК) по сравнению с режимом без кодирования при одинаковых видах модуляции и вероятностях ошибок ( $P_{b0} = P_{bj}$ ) на выходах устройств:

$$\Delta G_{0j} = 10 \lg(h'_0 / h'_j) = 10 \lg(\mu_{pj} \xi_{0j} / q_f), \quad (17)$$

где

$$\xi_{0j} = \left( A - \lg \sqrt{2,3(A - V_0) / q_f} \right) / \left( D_j - \lg \sqrt{2,3(D_j - V_j) / \mu_{pj}} \right). \quad (18)$$

Из соотношений (17), (18) видно, что  $\Delta G_{0j}$  зависит от числа исходных ступеней декодирования и определяется в основном результирующей эффективностью  $\mu_{pj}$ . При вероятности  $P_{bj} \rightarrow 0$  значения  $\xi_{0j} \rightarrow 1$  и  $\beta_{jN} \rightarrow 1$ . В этих условиях ЭВК стремится к асимптотическому пределу, который для СК и кода РС определяется по формулам:

$$\Delta G_{0j}^{\text{СК}} = 10 \lg \left[ \prod_{j=1}^N d_{Cj} R_{jN}^{\text{СК}} \right]; \quad \Delta G_{0j}^{\text{РС}} = 10 \lg \left[ \prod_{j=1}^N (t_j + 1) R_{jN}^{\text{РС}} \right]. \quad (19)$$

На основании соотношений (11)–(13) для  $h'_j$  рассчитывается энергетическая эффективность, вносимая отдельными ступенями декодирования:

$$\Delta G_{ji} = 10 \lg(h'_j / h'_i), \quad (20)$$

где  $h'_j, h'_i$  – значения ОСШ, определяемые по (11)–(13), при которых на выходах  $j$ -й и  $i$ -й ступеней декодирования обеспечивается  $P_{bj} = P_{bi}$  для  $i \neq j$ .

Используя (6) при  $\mu_{pN} = q_f R_{1N}$ , получим формулу для расчета вероятности ошибки при кодировании на входе первой ступени декодирования

$$P_{b\text{вх}} = \frac{C_f}{\alpha_{pN} \sqrt{q_f R_{1N} \pi h'_j}} \cdot 10^{-q_f R_{1N} h'_j / 2,3}. \quad (21)$$

Из сравнения (16) и (21) следует, что в системах с кодированием вследствие вносимой избыточности в цифровой поток отношение  $P_{b\text{вх}}$  к  $P_{b0}$  растет с уменьшением кодовой скорости  $R_{1N}$  и увеличением  $h'_j$ . Принимая во внимание (21) и (6), запишем выражение для определения исправляющей способности первой ступени декодирования при  $N$ -каскадном кодировании и независимости ошибок в кодовой комбинации

$$I_1 = P_{b\text{вх}} / P_{b1} = \sqrt{q_f R_{1N} / \mu_{1N}} \cdot 10^{h'_j (\mu_{1N} - q_f R_{1N}) / 2,3}, \quad (22)$$

где  $P_{b1}$  – вероятность ошибки на выходе первой ступени декодирования.

Из (22) с учетом (2) следует, что при  $d_{C1} \beta_{1N}^{\text{СК}} \leq 1$  или при  $(t_1 + 1) \beta_{1N}^{\text{РС}} \leq 1$  исправление ошибок первой ступеню декодирования отсутствует, и  $I_1 \leq 1$ . В системах с каскадным кодированием расчет ОСШ, при котором обеспечивается требуемая достоверность приема, осложняется необходимостью знания  $P_{bj}$  на выходах каждой из ступеней декодирования, что является условием для определения  $\beta_{jN}$ ,  $\mu_{jN}$  и  $\mu_{pj}$ . Взаимосвязь между искомым значением  $P_{b(j-1)}$  на выходе  $(j-1)$ -й ступени и известным  $P_{bj}$  на выходе  $j$ -й ступени следующая:

$$-\lg P_{b(j-1)} = \frac{-\lg P_{bj} + \lg(\chi_j \mu_{pj} / \sqrt{2,3(D_j - V_j)})}{\mu_{jN}} - \lg \left( \frac{\chi_{(j-1)} \mu_{p(j-1)}}{\sqrt{2,3(D_{(j-1)} - V_{(j-1)})}} \right). \quad (23)$$

Соотношение (23) является неявным, поскольку в нем  $\mu_{pj}$  и  $\mu_{p(j-1)}$  не определены и зависят от  $P_{bj}$ . Поэтому методика расчета систем с  $N \geq 2$  состоит в предварительном вычислении всех составляющих  $\mu_{pj}$  с использованием приближения

$$-\lg P_{b(j-1)} = \left[ \left( -\lg P_{bj} + \lg \chi_j \right) / \mu_{jN} \right] - \lg \chi_{(j-1)}. \quad (24)$$

После этого следует уточняющий расчет  $\mu_{pj}$  по (23) и определение ОСШ по (11)–(13). Для рассчитанного ОСШ вычисляется информационная эффективность системы

$$\eta_{\text{инф}} = B_0 / C = 0,3 \gamma_c / \lg(1 + mR_{1N}h'_j), \quad (25)$$

где  $B_0$  – информационная скорость, бит/с;  $C$  – пропускная способность канала связи по критерию Шеннона, бит/с;  $\gamma_c = mR_{1N}/b_p$  – спектральная эффективность, бит/(с·Гц);  $b_p = \Delta f_K / \Delta f_{\Pi}$  – отношение полосы частот  $\Delta f_K$  на канал к полосе частот  $\Delta f_{\Pi}$ , занимаемой сигналом.

### Результаты аналитических расчетов

На основании полученных соотношений рассчитаны показатели систем для одно-, двух- и трехкаскадных кодовых конструкций с различным сочетанием кодов и их параметров. В табл. 3 для КАМ-4 приведены значения ОСШ, ЭВК,  $-\lg P_{b\text{вх}}$  и  $\eta_{\text{инф}}$  в зависимости от  $P_{b1}$  для однокаскадного кодирования с использованием СК ( $R_1 = 7/8$ ,  $K_1 = 9$ ,  $d_{C1} = 4$ ) и кода РС ( $R_1 = 111/127$ ,  $t_1 = 8$ ) при равных для них значениях спектральных эффективностей.

**Таблица 3.** Показатели систем с однокаскадным сверточным кодом (СК) и кодом Рида-Соломона (РС)  
**Table 3.** Indicators of systems with single-stage convolutional code (CC) and Reed-Solomon (RS) code

Параметр / Parameter	Вероятность ошибки / Error probability									
	10 <sup>-2</sup>		10 <sup>-4</sup>		10 <sup>-6</sup>		10 <sup>-8</sup>		10 <sup>-10</sup>	
	СК/СС	РС/РС	СК	РС	СК	РС	СК	РС	СК	РС
$h_1$ , дБ	3,810	4,650	4,750	5,660	6,000	6,520	7,170	7,250	8,120	7,860
$\Delta G_{01}$ , дБ	0,710	-0,130	3,680	2,770	4,540	4,080	4,800	4,720	4,940	5,200
$-\lg P_{b\text{вх}}$	1,630	1,860	1,900	2,210	2,340	2,550	2,860	2,900	3,400	3,240
$\eta_{\text{инф}}$	0,732	0,668	0,661	0,602	0,582	0,554	0,522	0,518	0,480	0,490

Согласно табл. 3, в области заметных и умеренных ошибок ( $P_{b1} \geq 10^{-8}$ ) преимущества по всем показателям имеет СК, в области меньших ошибок – код РС.

В табл. 4 для КАМ-4 приведены значения энергетической и информационной эффективностей систем с двухкаскадным кодированием по схемам декодирования СК + РС и СК + СК для принятых выше параметров. Согласно табл. 4, все показатели при двухкаскадном кодировании заметно улучшены и менее зависимы от значения ошибок. В области  $P_{b2} \geq 10^{-8}$  преимущества имеет схема СК + СК, в области меньших ошибок – схема СК + РС. Если в комбинированной кодовой конструкции поменять местами СК и код РС, сделав его внутренним кодом, то значения ОСШ по сравнению со схемой СК + РС при  $p_{bj} = 10^{-2} \dots 10^{-8}$  ухудшаются на 1,1 дБ.

**Таблица 4.** Показатели систем для схем с двухкаскадным кодированием  
**Table 4.** System indicators for schemes with two-stage coding

Параметр / Parameter	Вероятность ошибки / Error probability									
	10 <sup>-2</sup>		10 <sup>-4</sup>		10 <sup>-6</sup>		10 <sup>-8</sup>		10 <sup>-10</sup>	
	СК+РС	СК+СК	СК+РС	СК+СК	СК+РС	СК+СК	СК+РС	СК+СК	СК+РС	СК+СК
$h_2$ , дБ	3,460	3,130	3,700	3,500	3,950	3,830	4,210	4,250	4,470	4,660
$\Delta G_{02}$ , дБ	1,060	1,390	4,730	4,930	6,590	6,710	7,760	7,720	8,590	8,400
$\Delta G_{12}$ , дБ	-0,030	0,30	1,350	1,550	2,570	2,690	3,510	3,470	4,210	4,020
$\eta_{\text{инф}}$	0,714	0,744	0,694	0,711	0,674	0,684	0,654	0,651	0,635	0,622

В табл. 5 для КАМ-4 и трехкаскадного сверточного кодирования с однопозиционными параметрами ( $R_1 = R_2 = R_3 = 7/8$  и  $d_{M1} = d_{M2} = d_{M3} = 4$ ) приведены значения ОСШ при использовании одной, двух и трех ступеней декодирования. Согласно табл. 5, требуемые значения  $h_j$  для обеспечения  $P_{bj}$  с увеличением числа ступеней снижаются и повышается крутизна кривых помехоустойчивости. Однако энергетический выигрыш, вносимый каждой ступенью, уменьшается. При  $P_{bj} = 10^{-10}$  выигрыш за счет второй ступени составил  $h_1 - h_2 = 4,09$  дБ, за счет третьей –  $h_2 - h_3 = 2,01$  дБ. Благодаря снижению ОСШ информационная эффективность  $\eta_{инф} = 0,7$ .

**Таблица 5.** Зависимость отношения сигнал/шум и энергетического выигрыша от кодирования для трехкаскадного кодирования

**Table 5.** Dependence of the signal-to-noise ratio and the energy gain from coding for three-stage coding

Параметр / Parameter	Вероятность ошибки / Error probability				
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-8}$	$10^{-10}$
$h_3$ , дБ	2,90	3,00	3,03	3,08	3,13
$h_2$ , дБ	3,10	3,55	4,10	4,62	5,14
$h_1$ , дБ	3,56	5,49	7,05	8,27	9,23
$\Delta G_{03}$ , дБ	1,62	5,43	7,51	8,89	9,93
$\Delta G_{13}$ , дБ	0,91	1,75	2,97	4,09	4,99
$\Delta G_{23}$ , дБ	0,23	0,50	0,80	1,17	1,53

В табл. 5 также приведены значения ЭВК при трехкаскадном кодировании и декодировании, которые можно сравнить со значениями для устройств без кодирования  $\Delta G_{03}$ , с однокаскадным  $\Delta G_{13}$  (табл. 3) и двухкаскадным  $\Delta G_{23}$  (табл. 4) кодированием. Согласно табл. 5, с уменьшением  $P_{bj}$  и увеличением числа каскадов значения ЭВК растут и при  $P_{bj} = 10^{-10}$  составляют:  $\Delta G_{03} = 9,93$  дБ,  $\Delta G_{13} = 4,99$  дБ и  $\Delta G_{23} = 1,53$  дБ. Таким образом, энергетический выигрыш от наращивания числа каскадов в кодовой конструкции увеличивается, причем тем заметнее, чем выше требования к достоверности приема. Однако приращение ЭВК по мере увеличения числа каскадов сокращается.

### Заключение

1. Предложены аналитические соотношения для определения помехоустойчивости, исправляющей способности, энергетической и информационной эффективностей систем связи с  $M$ -позиционной модуляцией и  $N$ -каскадным составным кодированием, использующим разнотипные по структуре сверточные и блочные коды Рида-Соломона.

2. Соотношения представлены в компактном и общем для исследований виде благодаря введению в рассмотрение коэффициентов, определяющих параметры модуляции (табл. 1), и множителей эффективностей декодирования сверточных кодов (формула (8)) и кодов Рида-Соломона (10), функционально зависящих от вероятностей ошибок на их выходах.

3. Определены требования к формированию структуры составной конструкции для минимизации отношения сигнал/шум. Представлены исследования характеристик систем с одно-, двух- и трехкаскадным кодированием и показано, что усложнение конструкций с  $N \geq 3$  предпочтительно в системах, требующих высокую достоверность приема.

### Список литературы

1. Форни, Д. Каскадные коды / Д. Форни. Пер. с англ. М.: Мир, 1970.
2. Золотарев, В. В. Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы / В. В. Золотарев, Г. В. Овечкин. М.: Горячая линия – Телеком, 2004.
3. Липкович, Э. Б. Аналитическая модель расчета помехоустойчивости систем связи с многопозиционными видами модуляции и сверточным кодированием / Э. Б. Липкович, А. А. Серченя // Электросвязь. 2020. № 10. С. 62–66.

## References

1. Forni D. (1970) *Kaskadnyye Kody*. Moscow, Mir Publ. (in Russian).
2. Zolotarev V. V., Ovechkin G. V. (2004) *Noise-Correcting Coding. Methods and Algorithms*. Moscow, Hotline – Telecom Publ. (in Russian).
3. Lipkovich E. B., Serchenya A. A. (2020) Analytic Model for Calculating the Noise Immunity of Communication Systems with Multi-Position Modulation Types and Convolutional Coding. *Electrosvyaz*. (10), 62–66 (in Russian).

## Вклад авторов

Липкович Э. Б. предложил аналитические модели расчета.

Рабцевич В. В. осуществила моделирование характеристик систем с каскадным кодированием.

## Authors' contribution

Lipkovich E. B. proposed the analytical calculation models.

Rabtsevich V. V. carried out modeling of the characteristics of systems with cascade coding.

## Сведения об авторах

**Липкович Э. Б.**, доц. каф. инфокоммуникационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

**Рабцевич В. В.**, ст. преп. каф. инфокоммуникационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

## Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,  
г. Минск, ул. П. Бровки, 6  
Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники  
Тел.: +375 17 293-88-19  
E-mail: rabcevichv@bsuir.by  
Рабцевич Виолетта Викторовна

## Information about the authors

**Lipkovich E. B.**, Associate Professor at the Department of Infocommunication Technologies of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

**Rabtsevich V. V.**, Senior Lecturer at the Department of Infocommunication Technologies of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

## Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,  
Minsk, P. Brovki St., 6  
Belarusian State University  
of Informatics and Radioelectronics  
Tel.: +375 17 293-88-19  
E-mail: rabcevichv@bsuir.by  
Rabtsevich Violetta Viktorovna