http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2023-21-4-84-92

Оригинальная статья
Original paper

УДК 519.17

МЕТОД ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛИ НА ГРАФОВОЙ МОДЕЛИ ПРИ ДВУХ КРИТЕРИЯХ КАЧЕСТВА

С. В. ЧЕБАКОВ[1], Л. В. СЕРЕБРЯНАЯ[2,3]

[1]Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси (г. Минск, Республика Беларусь)
[2]БИП – Университет права и социально-информационных технологий (г. Минск, Республика Беларусь)
[3]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (г. Минск, Республика Беларусь)

Поступила в редакцию 17.03.2023

Аннотация. Рассмотрены особенности построения и применения графовых моделей для решения прикладных задач. Предложена графовая модель с двумя критериями качества, на которой выполняется поиск оптимальных путей между заданными вершинами графа. Каждое ребро графа имеет весовой коэффициент, определяющий количество временных единиц, требуемых для прохождения данного ребра. Каждая вершина может находиться в одном из двух состояний: «открыто» или «заблокировано». Первоначально все вершины открыты, однако их состояния могут изменяться в процессе решения задачи. Поиск решения ограничен заданным временем. Если в ходе движения по выбранному маршруту вершины графа становятся заблокированными, требуется искать альтернативные пути достижения цели. Определено понятие допустимого пути на графе. Построено паретовское множество, из которого по заданному правилу выбраны допустимые пути. Для этого разработана процедура выбора пути из множества Парето. По завершении выбора путь считается оптимальным для движения по нему из начальной вершины в целевую. Представлены ситуации, которые могут происходить в процессе выбора пути и прохождения по нему. Их появление – следствие изменения состояний вершин графа. На основе процедуры выбора разработан алгоритм поиска оптимальных путей между заданными вершинами на графовой модели.

Ключевые слова: графовая модель, оптимальный путь, множество Парето, состояние вершины, алгоритм поиска.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования. Чебаков, С. В. Метод достижения цели на графовой модели при двух критериях качества / С. В. Чебаков, Л. В. Серебряная // Доклады БГУИР. 2023. Т. 21, № 4. С. 84–92. http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2023-21-4-84-92.

METHOD OF ACHIEVING THE GOAL ON A GRAPH MODEL WITH TWO QUALITY CRITERIA

SERGEY V. CHEBAKOV[1], LIYA V. SEREBRYANAYA[2,3]

[1]Joint Institute for Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Republic of Belarus)
[2]BIP – University of Law and Social-Information Technologies (Minsk, Republic of Belarus)
[3]Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (Minsk, Republic of Belarus)

Submitted 17.03.2023

Abstract. The features of the construction and application of graph models for solving applied problems are considered. A graph model with two quality criteria is proposed, on which the search for optimal paths between given graph vertices is performed. Each edge of the graph has a weighting factor that determines the number of time units required to pass this edge. Each vertex can be in one of two states: “open” or “locked”. Initially, all vertices are open, but their states may change in the process of problem solving. The search for a solution is limited by a given time. If during the movement along the chosen route the graph vertices become blocked, it is necessary to look for alternative ways to achieve the goal. A method for constructing a Pareto set from which admissible paths are selected is proposed. The notion of an admissible path on a graph is defined. A procedure for choosing a path from the Pareto set has been developed. Upon completion of the choice, the path is considered optimal for following it from the initial vertex to the target. Situations that can occur in the process of choosing a path and passing along it are presented. Based on the selection procedure, an algorithm for finding optimal paths between given vertices on a graph model has been developed.

Keywords: graph model, optimal path, Pareto set, vertex state, search algorithm.

Conflict of interests. The authors declare no conflict of interests.

For citation. Chebakov S. V., Serebryanaya L. V. (2023) Method of Achieving the Goal on a Graph Model with Two Quality Criteria. *Doklady BGUIR*. 21 (4), 84–92. http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2023-21-4-84-92 (in Russian).

Введение

Построение модели – важный этап в ходе решения любой исследовательской или научной задачи. Среди многообразия используемых моделей наиболее популярными считаются графовые. Это объясняется тем, что большинство задач из разных прикладных областей может быть представлено на графах. Преимущество графовых моделей – это то, что на их основе можно выдвигать и проверять гипотезы о причинно-следственных связях в изучаемых объектах, процессах и явлениях. Кроме того, графы – общедоступное средство объяснения сложных ситуаций на интуитивном уровне.

Для большинства решаемых задач требуется выявить структуру зависимостей между данными при их разнообразной обработке. Часто это выполняется с помощью графового моделирования, в котором структура зависимостей между данными представляется в виде графа. В данном случае вершины графа отождествляются с изучаемыми объектами, а ребра или дуги графа указывают на наличие зависимости между соответствующими объектами. Обобщенно графовая модель – это представление многомерного распределения объектов в виде графа [1–3].

Наиболее часто на графовых моделях осуществляется поиск путей, удовлетворяющих заданным условиям. В статье выполнен поиск путей на неориентированном графе при введенных двух критериях качества. Подходящий путь выбирали из множества Парето. При этом ситуации на графе могут изменяться в ходе решения задачи, что требует выбора нового пути для движения к целевой вершине, а также контроля выполнения всех заданных требований.

Процесс достижения цели на графе при неизменном состоянии вершин

В процессе исследований выполняли поиск оптимальных путей на графовой модели. Граф состоит из элементов двух типов: вершин и ребер. Каждое ребро имеет весовой коэффициент, определяющий количество временных единиц, которые требуются для прохождения данного ребра. Каждая вершина может находиться в одном из двух состояний: «открыто» или «заблокировано». Первоначально все вершины находятся в состоянии «открыто». Состояние вершин может изменяться во времени. Проходить через вершину можно только тогда, когда она находится в состоянии «открыто». Пусть заданы начальная v_0 и целевая v_n вершины графа G. Требуется за минимально возможное время достигнуть целевой вершины в процессе движения по графу. Структура графа не изменяется в течение всего времени решения поставленной задачи. Для достижения целевой вершины определено допустимое время, обозначенное величиной ресурса T.

Определение 1. Допустимым будет считаться путь из начальной к целевой вершине, чье время достижения цели меньше либо равно заданному ресурсу T и все вершины которого находятся в состоянии «открыто». Каждому отдельному альтернативному пути соответствует время достижения заданной цели. Предположим, для движения к цели выбран один из путей с наименьшим временем, все вершины которого находятся в состоянии «открыто». Если выбранный путь состоит из большого количества вершин, то движение по нему не всегда оказывается оптимальным из-за того, что любая из его вершин может перейти в процессе движения в состояние «заблокировано». Следовательно, потребуется перейти к другому пути, на что потратится дополнительный ресурс.

Для решения поставленной задачи необходимо разработать математическую модель и алгоритм, позволяющие управлять процессом достижения цели. Для характеристики каждого альтернативного пути, кроме показателя времени достижения цели, введен второй критерий – число вершин, которые необходимо пройти по каждому пути от начальной до конечной вершины. В предложенном двухкритериальном пространстве предпочтений определено отношение доминируемости на множестве всех альтернативных путей достижения заданной цели [4, 5]. Введем несколько определений для данной модели.

Определение 2. Путь *a* доминирует над путем *b* при выполнении одного из условий:

– время достижения цели по пути *a* меньше времени достижении цели по пути *b* и число вершин графа пути *a* меньше либо равно числу вершин пути *b*;

– время достижения цели по пути *a* меньше либо равно времени по пути *b* и число вершин пути *a* меньше числа вершин пути *b*.

Определение 3. Множество Парето на множестве всех альтернативных путей из начальной в конечную вершину во введенном двухкритериальном пространстве представляет собой множество всех недоминируемых вариантов достижения цели.

Из Определения 3 следует, что для любого пути достижения заданной цели, не входящего в множество Парето, в нем существует путь, который над ним доминирует. Алгоритм построения множества Парето в двухкритериальном пространстве не требует методов перебора, для него достаточно поиска решения в упорядоченных структурах данных [6].

Будем считать, что число допустимых путей намного больше единицы. Предположим, на множестве альтернативных путей достижения заданной цели определено множество Парето в соответствии с Определениями 2 и 3. Выберем некоторый путь *P* из множества Парето.

Определение 4. Пусть *S* – первая вершина пути *P*, начинающегося в начальной вершине, в которой имеется возможность продолжить движение по некоторому пути достижения цели, отличному от *P*. Коэффициентом продолжения данного пути принято число альтернативных путей из множества Парето, приводящих к целевой вершине из вершины *S*.

Все пути из множества Парето имеют общую часть с путем *P* от начальной вершины, включая вершину *S*. Будем считать, что вершина *S* имеет коэффициент продолжения, равный числу альтернативных путей из множества Парето, приводящих из *S* в целевую вершину v_n. Начальную вершину v_0 можно, в частности, рассматривать как продолжение условного пути с нулевым временем достижения начальной вершины. Предположим, что коэффициент продолжения начальной вершины равен единице. Тогда, если прерван процесс прохождения данного пути, невозможен выбор какого-либо иного альтернативного пути, кроме выполняемого в данный момент. Следовательно, нельзя достигнуть цели в ситуации прекращения движения по данному пути в любой вершине, пока не достигнута вершина с коэффициентом больше единицы. Будем считать, что начальная вершина имеет коэффициент продолжения больше единицы.

Влияние величины коэффициента продолжения на процесс достижения цели можно показать следующим образом. Пусть при движении по выбранному пути пройдена вершина *S* с коэффициентом продолжения больше единицы, в ней выбран путь для дальнейшего движения к цели. Тогда при невозможности на некотором шаге продвижения по данному пути достаточно вернуться не в начальную, а в последнюю пройденную вершину с коэффициентом продолжения больше единицы, т. е. в вершину *S*. Следовательно, каждый раз, выбирая путь с коэффициентом больше единицы, уменьшаются возможные потери при переходе на другой путь достижения цели.

При движении из начальной вершины существует два варианта развития событий:

– пройдены все вершины пути и целевая вершина достигнута;

– выполнение очередной вершины оказалось невозможным.

Рассмотрим первый случай. Выбор для реализации конкретного пути из множества Парето осуществляется следующим образом. Предположим, что в начальной вершине v_0 существуют пути с коэффициентом продолжения больше единицы, которые входят в множество Парето. На этом подмножестве находим путь *P* с координатами, минимально отличающимися значениями по обоим критериям от средних значений координат у элементов данного подмножества. Пусть в ходе движения по пути *P* была достигнута вершина *S*, имеющая коэффициент продолжения больше единицы. Для выбора альтернативного пути в вершине *S* применяется двухкритериальная модель, в которой критериями выбора каждого пути являются значение времени достижения цели и число вершин, пройденных при реализации конкретного маршрута. Это требует нахождения множества Парето на множестве альтернативных путей достижения заданной цели из вершины S и определения пути из этого множества Парето для дальнейшей реализации. Тогда справедливо следующее Утверждение.

Утверждение. Пусть сформировано множество Парето альтернативных путей достижения заданной цели из вершины S, рассматриваемой в качестве начальной, при новом значении ресурса T_1. Оно совпадает с множеством Парето на наборе альтернативных путей, полученных при их построении из начальной вершины при значении первого ресурса, равного T, и проходящих через вершину S.

Доказательство. У всех альтернативных путей из начальной вершины к целевой, продолжением которых являются пути, выходящие из вершины S, есть общая часть. Это маршрут на графе из начальной вершины к S с затраченным ресурсом U и определенным количеством вершин. Следовательно, каждый путь из вершины S к целевой вершине формируется с использованием измененного ресурса $T_1 = T - U$. Альтернативный путь достижения цели существует как из вершины S, так и из вершины v_0. Пусть имеется допустимый путь L из вершины v_0 через S, время прохождения которого меньше или равно величине T. Тогда и путь из вершины S, представляющий собой продолжение пути L, также является допустимым путем из S при ресурсе T_1. Пусть G_s – допустимые пути достижения цели из множества Парето в вершине S, а G_v – допустимые пути достижения цели, входящие в множество Парето из начальной вершины v_0 и проходящие через S. Хотя бы один такой путь существует, это – путь P. Покажем, что его продолжение P_s из вершины S до целевой вершины является тоже паретовским путем в множестве допустимых путей из S. Предположим противное – путь P_s из вершины S до целевой вершины является доминируемым в соответствии с Определением 2. У пути P от v_0 к целевой вершине v_n и пути P_s существует общая часть. При этом P_s, по предположению, является доминируемым. Тогда и путь P будет доминируемым на множестве всех альтернативных путей из начальной вершины к целевой, что противоречит тому факту, что P принадлежит множеству Парето. Это же рассуждение справедливо и для любого допустимого пути из множества G_v. Предположим, существует путь A из множества G_s такой, что допустимый путь из вершины v_0, чьим продолжением есть A, является доминируемым. В этом случае и путь A является доминируемым, а это противоречит тому факту, что A принадлежит множеству G_s. Аналогичное рассуждение справедливо и для любого допустимого пути из множества G_s. Следовательно, множества G_s и G_v совпадают. Утверждение доказано.

Из этого Утверждения следует, что нет необходимости находить все множество Парето альтернативных путей достижения цели в вершине S. Достаточно рассмотреть в ней элементы паретовского множества, определенного в начальной вершине v_0 и проходящего через S.

На следующем этапе требуется выбрать из S путь для дальнейшего движения к целевой вершине. Будем рассматривать ее как новую начальную вершину и назовем вторичной начальной вершиной по сравнению с v_0, которая считается первичной начальной вершиной. Первоначально значение ресурса времени для определения вариантов допустимых путей равно величине T_1. В паретовском множестве определяются пути из вторичной начальной вершины S к целевой вершине, имеющие коэффициенты продолжения больше единицы. Для прохождения выбирается путь из множества Парето, начинающийся в вершине S и имеющий значения критериев, достаточно близкие к их средним значениям среди элементов множества Парето. Пусть достигнута вершина S_1 с возможностью выбора в ней альтернативного пути достижения цели. Для измененного значения ресурса $T_2 = T_1 - U_1$ требуется определить новое множество Парето альтернативных путей достижения цели из вершины S_1. Вместе с тем в S_1 справедливо Утверждение при условии, что начальной вершиной считается S, а направление движения на графе – вершина S. Следовательно, и в S_1 достаточно рассмотреть подмножество уже определенных паретовских путей во вторичной начальной вершине S. Таким образом, при выборе путей в каждой вершине с коэффициентом продолжения больше единицы, в соответствии с Утверждением, используются продолжения ранее выбранных паретовских путей, определенных в произвольной начальной вершине.

Предположим, что при рассмотрении какой-либо начальной вершины в паретовском множестве не существует путей с коэффициентами продолжения, большими единицы. В этом случае каждый допустимый путь из данного множества до целевой вершины имеет собственный уникальный участок. Тогда для реализации выбирается путь, имеющий значения критериев, достаточно близкие к их среднему значению среди элементов множества Парето в данной вершине. Поскольку, по предположению, условия прохождения всех вершин на любом выбираемом пути выполнены, целевая вершина будет достигнута.

Рассмотрена общая схема процесса достижения цели, определен приоритет выбора путей в паретовских множествах из указанных вершин графа. Все паретовские множества, определенные в вершинах с коэффициентом продолжения больше единицы, представляют собой подмножества паретовского множества, построенного в предыдущей начальной вершине. При этом двухкритериальная модель используется для оптимизации процесса достижения цели с заданным ресурсом времени T и при возникновении ситуации, когда не может быть пройдена какая-либо вершина из выбранного пути. В этом случае невозможно ограничиваться паретовскими путями, определенными только в указанной начальной вершине.

Выбор путей достижения цели на графе при изменяющихся состояниях вершин

Рассмотрим алгоритм поиска оптимальных маршрутов между заданными вершинами на графовой модели. Предположим, в начальной вершине v_0 сформированы допустимые альтернативные пути достижения цели и определено множество Парето. Выполняем процедуру выбора конкретного пути из паретовских элементов для движения по нему. Входные параметры этой процедуры следующие:

– набор паретовских элементов на сформированном множестве допустимых альтернативных путей достижения цели из заданной начальной вершины U_j, первичной или вторичной, где $j = 1, h$. Переменная h определяет количество различных начальных вершин, рассмотренных при выполнении процедуры в процессе решения задачи;

– величина $T_i = T$ при $i = 0$, либо находится в процедуре при других значениях i.

Назначение этой процедуры состоит в выборе пути достижения цели из заданной начальной вершины U_j среди элементов паретовского множества и его прохождении. Рассмотрим шаги процедуры выбора.

1. На множестве Парето определяются альтернативные пути достижения цели из вершины U_j, которые включают в себя вершины с коэффициентом продолжения больше единицы. Если такие пути существуют, то следует переходить к шагу 2, иначе любой путь на множестве Парето из заданной начальной вершины U_j соответствует безальтернативному прохождению каждой вершины пути при движении к цели. Тогда на паретовском множестве определяется путь с координатами, значения которых по обоим критериям стремятся к средним величинам координат среди всех элементов множества Парето. Предположим, что в процессе движения по данному маршруту его очередная вершина находится в состоянии «заблокировано». Тогда на величину Z_i ресурса T, который требуется для возвращения в начальную вершину U_j, уменьшается значение T. Полученное значение ресурса представляет собой величину

$$T_i = T_{i-1} - Z_i,\ i = 1 \ldots N_s, \tag{1}$$

где N_s – число проведенных корректировок T в течение всего времени решения задачи.

После каждой проведенной корректировки ресурса или достижения цели происходит выход из процедуры. Если в процессе движения по выбранному пути не существует вершины в состоянии «заблокировано», то целевая вершина обязательно будет достигнута.

2. Среди всех альтернативных путей из начальной вершины U_j в вершины с коэффициентом продолжения больше единицы находится путь с координатами, стремящимися к средним значениям координат путей из этого подмножества. Пусть в процессе движения по выбранному пути была пройдена вершина графа V с коэффициентом продолжения больше единицы. Теперь она будет считаться начальной вторичной вершиной. Затем уменьшается значение ресурса на величину, необходимую для достижения вершины V. Предположим, что при реализации выбранного пути еще не достигнута вершина V, но очередная вершина находится в состоянии «заблокировано». В соответствии с (1) выполняется корректировка значения ресурса, требуемого для возврата в начальную вершину U_j. Пусть после изменения значение ресурса оказалось меньше либо равно нулю, что соответствует ситуации полного исчерпания ресурса T. Если произойдет любая из приведенных ситуаций, то происходит выход из процедуры.

В результате выполнения процедуры выбора могут появиться следующие ситуации.

1. Достигнута заданная целевая вершина, и решение задачи заканчивается.

2. Очередная вершина альтернативного пути, определенного в процедуре выбора, представляет собой вершину V с коэффициентом продолжения больше единицы и значением ресурса T_i больше нуля. Она является вторичной начальной вершиной. Затем, в соответствии с Утверждением, определяется новое множество Парето путей достижения цели из этой начальной вершины. Далее выполняется процедура выбора со значением параметра U_j, равным V. После ее выполнения вновь анализируются ситуации на графе.

3. Предположим, что после выполнения процедуры выбора очередная вершина пути, начинающегося в вершине U_j, находится в состоянии «заблокировано». В таком случае изменяется значение ресурса T_i, как показано в (1). Далее формулируется новая подзадача достижения цели. Для значения ресурса T_i определяется множество допустимых путей достижения цели из U_j в соответствии с Определением 1. Если такие пути существуют, формируется новое паретовское множество. Затем выполняется процедура выбора и анализируются ситуации, появившиеся после ее завершения. Кроме того, значение ресурса в формируемой подзадаче всегда меньше, чем его значение, которое было при вызове процедуры выбора, где он корректировался. Допустимые пути определяются из одной и той же начальной вершины. Следовательно, формируемое множество допустимых путей подзадачи включается в ранее построенное аналогичное множество. В частности, эти два множества могут совпадать.

Ситуация, когда при имеющемся значении ресурса для подзадачи не существуют допустимые пути из вершины U_j, рассматривается в следующем пункте.

4. Пусть в результате выполнения процедуры выбора возникла следующая ситуация. При движении по выбранному паретовскому пути очередная вершина находится в состоянии «заблокировано» и по возвращении в вершину U_j значение ресурса T_i оказалось исчерпанным. Это означает, что еще существуют альтернативные пути достижения цели из начальной вершины U_j, все вершины которых находятся в состоянии «открыто». При этом ни один из путей не является допустимым, поскольку их время выполнения больше значения T_i. Рассмотрим возможные продолжения решения задачи.

4.1. Пусть ресурс исчерпан, когда U_j совпадает с начальной вершиной v_0. Тогда задача не может быть решена при заданном значении ресурса. Переход к пункту 4.3.

4.2. Пусть вершина U_j является вторичной начальной вершиной и значение ресурса больше нуля. В этом случае требуется определить другую, ранее пройденную, начальную вершину, первичную или вторичную, с коэффициентом продолжения больше единицы. Предполагается, что из нее существуют допустимые пути достижения цели при значении ресурса T_i. При этом необходимо учесть уменьшение ресурса на величину, требуемую для перехода в эту вершину. Если такая вершина H существует, то из нее формируется множество допустимых путей достижения цели в соответствии с Определением 1. Затем определяются координаты путей в пространстве предпочтений и находится новое множество Парето. После чего выполняется процедура выбора, где параметр U_j становится равным H, и анализируются возможные ситуации. Если подходящей начальной вершины H не существует, то осуществляется переход к пункту 4.3.

4.3. Для возможного продолжения решения поставленной задачи необходимо увеличение ресурса T_i. Значение, на которое увеличивается ресурс, зависит от уже построенных путей достижения цели из вершины U_j. Формируется новая подзадача достижения цели с начальной вершиной U_j и новым значением ресурса $T_{\text{нов}}$. Если U_j совпадает с первичной начальной вершиной v_0, то подзадача представляет собой первоначальную задачу с новым значением ресурса. Пусть U_j является вторичной начальной вершиной. Поскольку она была достигнута при движении на графе из первичной вершины v_0, решение сформулированной подзадачи приводит к решению и первоначальной задачи достижения цели.

С учетом нового значения ресурса $T_{\text{нов}}$ определяются все допустимые альтернативные пути достижения цели из U_j. На этом множестве путей находится множество Парето в заданном двухкритериальном пространстве. Выполняется процедура выбора и анализируются возможные ситуации после ее завершения. При невозможности увеличения ресурса целевая вершина не будет достигнута, и решение задачи прекращается.

5. Предположим, после выполнения процедуры выбора оказалось, что рассмотрено все множество альтернативных путей достижения цели из начальной вершины U_j, у которых все вершины находились в состоянии «открыто». Однако целевая вершина еще не достигнута. При этом в результате последнего изменения, в соответствии с (1), ресурс времени T_i остается больше нуля. Пусть процедура выбора выполнена, когда U_j совпадает с первичной начальной вершиной v_0. Тогда процесс решения задачи прекращается, поскольку рассматриваемая задача не может быть решена при заданных начальных данных. Если U_j является вторичной начальной вершиной, то ситуация аналогична случаю исчерпания ресурса, который рассматривался в пункте 4.2. Это объясняется тем, что требуется переходить к другой начальной вершине. Выполняются все действия пункта 4.2 за исключением перехода на пункт 4.3. При нахождении новой начальной вершины выполняется процедура выбора и анализируются полученные ситуации. Пусть подходящая начальная вершина, из которой существуют допустимые пути достижения цели при заданном значении ресурса, не определена. Тогда в качестве начальной вершины рассматривается первая из ранее пройденных по данному пути начальная вершина E с коэффициентом продолжения больше единицы. Предположим, из нее существуют пути достижения цели, и все их вершины находятся в состоянии «открыто». При этом для прохождения вершин необходимо увеличение ресурса T_i. Если увеличение невозможно либо требуемой вершины E не существует, то целевая вершина не достигнута, и решение задачи прекращается. В противном случае на основе нового значения ресурса формируются допустимые пути достижения цели из вершины E, определяются их координаты в двухкритериальном пространстве, находится множество Парето и выполняется процедура выбора.

На основе вышеизложенных возможных ситуаций, происходящих в ходе решения поставленной задачи, предложен алгоритм достижения целевой вершины на графе из заданной начальной вершины v_0. Рассмотрим шаги алгоритма.

1. Определить существование путей достижения заданной цели из начальной вершины v_0 до целевой вершины. Если таких путей не существует, то решение задачи заканчивается, иначе переход к следующему шагу.

2. Определить все допустимые пути из начальной вершины v_0 до целевой вершины в соответствии с Определением 1. Если таких путей не существует, то для продолжения решения задачи требуется увеличение ресурса T. Переход к пункту 10. При существовании искомых путей переход к следующему шагу.

3. Определить значения критериев допустимых путей достижения цели во введенном двухкритериальном пространстве и построить множество Парето на нем.

4. Выполнить процедуру выбора.

5. Если в результате выполнения процедуры выбора достигнута целевая вершина, решение задачи найдено и алгоритм закончен, на шагах 6–9 рассматриваются возможные ситуации, которые происходят при выполнении процедуры выбора.

6. Пусть при выполнении процедуры выбора пройдена некоторая вершина V с коэффициентом продолжения больше единицы. В результате чего она становится новой вторичной начальной вершиной. Необходимо определить, используя Утверждение 1, новое паретовское множество. Переход к пункту 4.

7. Предположим, что после выполнения процедуры выбора очередная вершина пути из начальной вершины U_j находится в состоянии «заблокировано». Тогда получим уменьшенное значение ресурса T_j. Пусть для нового значения ресурса T_j можно определить множество допустимых путей достижения цели из U_j. В результате формируется подзадача с последним значением ресурса T_j и начальной вершиной U_j. Определяются значения критериев каждого допустимого пути во введенном двухкритериальном пространстве. Строится новое паретовское множество и выполняется переход к пункту 4. Если множество допустимых путей из вершины U_j не существует при указанном значении ресурса, переход к следующему пункту.

8. Пусть в результате выполнения процедуры выбора ресурс T исчерпан. Это означает, что альтернативные пути достижения цели из вершины U_j существуют, но ни один из них не является допустимым. Тогда выполняются действия, относящиеся к ситуации 4 по завершении процедуры выбора. Если для продолжения решения задачи требуется увеличение ресурса T, то переход к пункту 10, иначе целевая вершина не может быть достигнута.

9. Исчерпано все множество альтернативных путей достижения цели из начальной вершины U_j. При этом целевая вершина не достигнута, но оставшийся ресурс времени T_i больше нуля. Тогда выполняются действия, относящиеся к ситуации 5 по завершении процедуры выбора. Если в результате построено новое паретовское множество альтернативных путей достижения цели из определенной начальной вершины, то переход к пункту 4. Если требуется добавление ресурса, – переход к шагу 10.

10. Если увеличение ресурса невозможно, процесс решения задачи заканчивается. Иначе ресурс увеличивается на величину, достаточную для построения нового множества допустимых путей достижения цели из начальной вершины, первичной или вторичной. На этом множестве определяется новое множество Парето, переход к шагу 4.

Заключение

1. Рассмотрен неориентированный помеченный граф, на котором выполняется поиск оптимального пути из заданной начальной вершины в целевую вершину. Метка ребра – это количество временных единиц, требуемых для его прохождения. На достижение цели выделен временной ресурс T, и задача решается, пока он не исчерпан.

2. Предложена двухкритериальная модель качества, критериями которой являются время достижения цели и количество вершин графа, входящих в путь. Показано, что целесообразно выбирать допустимые пути из множества Парето, которое строится по двум указанным критериям. Поскольку ситуации на графе могут изменяться в процессе решения задачи, рассмотрен алгоритм корректировки ресурса времени и выбора оптимального пути на графе.

3. Выбранная модель отражает поведение объектов, процессов и явлений, характерных для многих задач из разных прикладных областей. Поэтому полученные результаты могут найти широкое прикладное применение.

Список литературы

1. Авдошин, С. М. Дискретная математика. Алгоритмы: теория и практика / С. М. Авдошин, А. А. Набебин. М.: ДМК Пресс, 2019. 282 с.
2. Алексеев, В. Е. Структуры данных и модели вычислений / В. Е. Алексеев, В. А. Таланов; 2-е изд., испр. М.: ИНТУИТ, 2016. 256 с.
3. Костюкова, Н. И. Графы и их применение. Комбинаторные алгоритмы для программистов / Н. И. Костюкова; 2-е изд., испр. М.: ИНТУИТ, 2016. 305 с.
4. Чебаков, С. В. Алгоритм нахождения множества Парето на конечном наборе начальных данных / С. В. Чебаков, Л. В. Серебряная // Информатизация образования. 2017. Т. 79, № 1. С. 84–94.
5. Чебаков, С. В. Оптимизация решения задачи с ограничением на ресурсы / С. В. Чебаков, Л. В. Серебряная // Доклады БГУИР. 2016. Т. 102, № 8. С. 46–52.
6. 6. Kung, H. F. On Finding the Maxima of a Set of Vectors / H. F. Kung, F. P. Preparata // Journal of the Association for Computing Machinery. 1975. No 22. P. 469–476.

References

1. Avdoshin S. M., Nabebin A. A. (2019) *Discrete Mathematics. Algorithms: Theory and Practice*. Moscow, DMK Press Publ. 282 (in Russian).
2. Alekseev V. E., Talanov V. A. (2016) *Data Structures and Computational Models*. 2nd ed., rev. Moscow, INTUIT Publ. 256 (in Russian).
3. Kostyukova N. I. (2016) *Graphs and their Application. Combinatorial Algorithms for Programmers*. 2nd ed., rev. Moscow, INTUIT Publ. 305 (in Russian).
4. Chebakov S. V., Serebryanaya L. V. (2017) Algorithm for Finding the Pareto Set on a Finite Set of Initial Data. *Informatization of Education*. 79 (1), 84–94 (in Russian).
5. Chebakov S. V., Serebryanaya L. V. (2016) Optimization of the Solution of a Problem with a Constraint on Resources. *Doklady BSUIR*. 102 (8), 46–52 (in Russian).
6. Kung H. F., Preparata F. P. (1975) On Finding the Maxima of a Set of Vectors. *Journal of the Association for Computing Machinery*. (22), 469–476.

Вклад авторов

Чебаков С. В. сформулировал постановку задачи для проведения исследования, предложил многокритериальную модель оптимизации и процедуру выбора.

Серебряная Л. В. разработала процедуру выбора и алгоритм поиска оптимального пути на графовой модели.

Authors' contribution

Chebakov S. V. formulated a problem statement for the study, proposed a multicriteria optimization model and a selection procedure.

Serebryanaya L. V. developed a selection procedure and an algorithm for finding the optimal path on a graph model.

Информация об авторах

Чебаков С. В., к. ф.-м. н., ст. н. с. Объединенного института проблем информатики Национальной академии наук Беларуси

Серебряная Л. В., к. т. н., заведующая кафедрой информационных технологий и математики БИП – Университет права и социально-информационных технологий, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,
г. Минск, ул. П. Бровки, 6
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
Тел.: +375 29 773-95-09
E-mail: l_silver@mail.ru
Серебряная Лия Валентиновна

Information about the authors

Chebakov S. V., Cand. of Sci., Senior Researcher at the Joint Institute for Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus

Serebryanaya L. V., Cand. of Sci., Head of the Department of Information Technologies and Mathematics BIP – University of Law and Social-Information Technologies, Associate Professor at the Information Technology Software Department of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,
Minsk, P. Brovki St., 6
Belarusian State University
of Informatics and Radioelectonics
Tel.: +375 29 773-95-09
E-mail: l_silver@mail.ru
Serebryanaya Liya Valentinovna