



<http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2023-21-4-76-83>

Оригинальная статья
Original paper

УДК 681.142.2

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ УСЛОВНОЙ НЕЧЕТКОЙ МЕРЫ

О. В. ГЕРМАН, Ю. О. ГЕРМАН, С. А. МИГАЛЕВИЧ, М. В. КУЗНЕЦОВ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
(г. Минск, Республика Беларусь)*

Поступила в редакцию 21.01.2023

© Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 2023
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2023

Аннотация. Рассмотрено применение условной логической формулы трехзначного исчисления в системе принятия решений. Такая формула дает возможность определения на ее основе условной нечеткой меры, что связано со следующими положительными моментами. Во-первых, отпадает необходимость в экспертном оценивании нечеткой меры истинности заключения для нечетких посылок, что уменьшает степень субъективности и устраняет необходимость обеспечения полноты статистических данных, а также обоснование полноты. Во-вторых, предлагаемый вариант вычисления условных заключений сравнительно просто допускает многопосылочный случай и возможность оценивать важность посылок на основе их приоритетов (в классических подходах типа Мамдани посылки не различаются по степени их важности для заключений). В-третьих, нет необходимости оценивать степень истинности самих правил для нечетких заключений. Указанные достоинства упрощают практическое использование и, в конечном итоге, повышают качество принимаемых решений, особенно в случае большого числа входных посылок (например, исчисляемого десятками). Приводится пример практического использования развиваемого на основе нечеткой условной меры подхода для принятия решений о коррекции процесса обучения по результатам тестирования.

Ключевые слова: принятие решений, нечеткая логика, правила вывода, мера истинности.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования. Принятие решений на основе условной нечеткой меры / О. В. Герман [и др.] // Доклады БГУИР. 2023. Т. 21, № 4. С. 76–83. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2023-21-4-76-83>.

DECISION-MAKING BASED ON A CONDITIONAL FUZZY MEASURE

OLEG V. GERMAN, JULIA O. GERMAN, SERGEY A. MIGALEVICH,
MIKHAIL V. KUZNETSOV

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (Minsk, Republic of Belarus)

Submitted 21.01.2023

Abstract. The application of a conditional logical formula of three-valued calculus in the decision-making system is considered. A conditional logical formula makes it possible to determine a conditional fuzzy measure on its basis, which is associated with the following positive aspects. First, there is no need for expert evaluation of the fuzzy measure of the truth of the conclusion for fuzzy premises, which reduces the degree of subjectivity and eliminates the need to ensure the completeness of statistical data, as well as the justification of completeness. Secondly, the proposed version of calculating conditional conclusions relatively simply allows for a multi-premise case and the ability to evaluate the importance of premises based on their priorities (in classical approaches like Mamdani, premises do not differ in their degree of importance for conclusions). Thirdly, there is no need

to evaluate the degree of truth of the rules themselves for fuzzy conclusions. These advantages simplify practical use and ultimately improve the quality of decisions made, especially in the case of a large number of inputs (for example, numbered in tens). An example of the practical use of the approach developed on the basis of a fuzzy conditional measure for making decisions about the correction of the learning process based on the testing results is given.

Keywords: decision making, fuzzy logic, inference rules, measure of truth.

Conflict of interests. The authors declare no conflict of interests.

For citation. German O. V., German Ju. O., Migalevich S. A., Kuznetsov M. V. (2023) Decision-Making Based on a Conditional Fuzzy Measure. *Doklady BGUIR*. 21 (4), 76–83. <http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2023-21-4-76-83> (in Russian).

Введение

В [1] введено и аксиоматизировано понятие условной логической формулы трехзначного исчисления. На базе этой формулы предложено выражение для условной нечеткой меры и показано, как его использовать при принятии решений. Имеется несколько альтернативных позиций для сравнения, которые основываются на рассмотрении формулы нечеткого заключения из нечетких посылок. Например, можно указать подходы Е. Мамдани [2], Т. Тэрано с соавторами [3], П. М. Ларсена [4] и др. Эти подходы используют нечеткие меры заключения правил, что, с одной стороны, делает их более универсальными, но, с другой, оставляет проблему определения этих самых нечетких мер заключения. В [5] рассматривается аналог формулы Байеса для логики возможностей. При наличии статистически значимой корреляции между входными признаками общее заключение может быть далеким от истины. Наконец, имеется также проблема, связанная с недостоверностью самих правил нечеткого заключения, которая в методах авторов [2–4] не рассматривается. Это замечание также указывает на некоторую ограниченность [2–5].

В статье описанные проблемы решались следующим образом. Во-первых, использование нечеткого аналога условной формулы, введенной в [1], избавляет от необходимости вводить степень истинности заключения для правил, поскольку она вычисляется. Во-вторых, рассматриваемый подход позволяет решить проблему взаимной (не)зависимости входных признаков, основываясь на предлагаемой схеме вычислений степени истинности заключений.

Условная формула и условная нечеткая мера

Определение. Формула $\{a|b\}$ – это условная трехзначная формула, значения которой определяются в соответствии с табл. 1.

Таблица 1. Значения формулы $\{a|b\}$
Table 1. Values of the formula $\{a|b\}$

a	b	$a b$
0	0	0
0	1	0
0	*	0
1	0	*
1	1	1
1	*	*
*	0	*
*	1	*
*	*	*

Таким образом, семантика формулы $\{a|b\}$ такова: она принимает значение формулы a всякий раз, когда b истинна; значение «ложь», если ложна a ; значение «не определена» во всех других случаях. Табл. 1 не допускает редукции к классическому двузначному исчислению из-за неопределенности значения $\{a|b\}$ при $a = 1$ и $b = 0$. С помощью табл. 1 истинности условной формулы можно показать, что

$$\{a|b\} \& \{a|d\} = \{a|b \& d\}. \quad (1)$$

Обобщая на непрерывный случай, имеем следующее определение [1]:

$$\mu(a|b) = \begin{cases} 0, & \mu(a) = 0; \\ 0,5, & 0 < \mu(b) \leq 0,5; \\ (2\mu(a) - 1)\mu(b) + 1 - \mu(a), & \mu(b) > 0,5. \end{cases} \quad (2)$$

Это определение наглядно иллюстрирует рис. 1, где $\mu(a|b) = \mu(a)$ при $\mu(b) = 1,0$. На оси ординат откладываются значения условной формулы $\mu(a|b)$ (жирная ломаная линия).

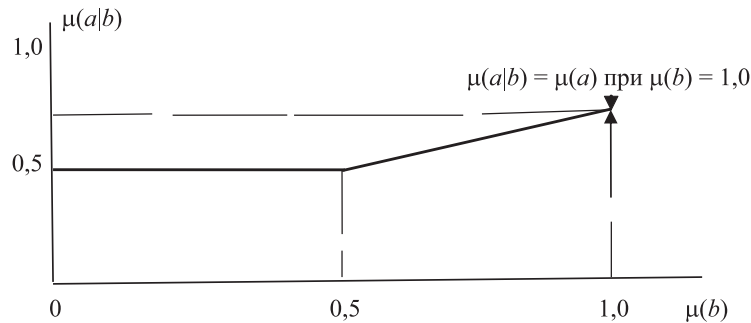


Рис. 1. Графическое представление условной нечеткой меры $\mu(a|b)$
Fig. 1. Graphic representation of the conditional fuzzy measure $\mu(a|b)$

Многоссылочная свёртка

Обратимся к правой (после знака равенства) части формулы (1). В случае нечетких посылок b и d в силу аксиоматики Л. Заде [6] имеем

$$\mu(b \& d) = \min(\mu(b), \mu(d)). \quad (3)$$

Недостаток выражения (3) состоит в том, что «вклад» посылок не дифференцируется. На практике одни посылки считаются более важными, другие – нет. Таким образом, представляется целесообразным рассматривать многокритериальную свёртку вместо (3):

$$\mu(b \& d) = \alpha_b \mu(b) + \alpha_d \mu(d); \quad \alpha_b + \alpha_d = 1, \quad \alpha_b, \alpha_d \geq 0. \quad (4)$$

Линейный характер (4) правомерен при независимости посылок. Выяснить возможность линейной свёртки типа (4) можно с помощью известных статистических подходов, например, на основе линейного дискриминантного анализа [7] или техники построения классифицирующего дерева, как описано в [8]. Аналогичным образом для определения весовых коэффициентов (приоритетов) посылок α_b, α_d можно строить матрицу приоритетов и применять технику Т. Саати [9].

Итак, выполненные выше действия привели к многоссылочному варианту формулы (2). В случае двух посылок она принимает следующий вид (для большего числа посылок обобщение достигается очевидным образом):

$$\mu(a|c \& d) = \mu(a|b = \alpha_c c + \alpha_d d) = \begin{cases} 0, & \mu(a) = 0; \\ 0,5, & 0 < \mu(b) \leq 0,5; \\ (2\mu(a) - 1)\mu(b) + 1 - \mu(a); \\ \alpha_c + \alpha_d = 1, & \alpha_c, \alpha_d \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Далее покажем, как применить рассмотренный формальный аппарат для практической задачи регулирования учебного процесса на основании ответов учащихся.

Пример практического использования условной логической формулы

Предложено использование условной логической формулы трехзначного исчисления в процессе тестирования знаний учащихся. При этом необходимо принимать во внимание следующие признаки и критерии:

К1 – владение базисными понятиями;

- К2** – способность применять базисные понятия в практических приложениях;
К3 – владение материалом в целом;
К4 – умение выделять множество факторов, влияющих на итоговый результат;
К5 – оперативность мышления;
К6 – процент ошибочных суждений/заключений/выводов;
К7 – процент успешно выполненных практических упражнений с учетом их сложности;
К8 – ориентация в сложных вопросах курса;
К9 – концентрация внимания;
К10 – алгоритмичность мышления.

Необходимо также ввести перечень следующих управляющих воздействий:

- R1** – углубить обучение в части базовых понятий;
R2 – увеличить (расширить) практическую составляющую курса;
R3 – увеличить мультимедийную составляющую;
R4 – пригласить на лекцию профессионала(ов)/эксперта(ов);
R5 – усложнить материал практических/лабораторных занятий;
R6 – упростить материал практических/лабораторных занятий;
R7 – предложить студентам выступить с рефератом (докладом) на лекции;
R8 – организовать выступление студентов на СНТК;
R9 – подготовка совместной(-ых) со студентами публикации(ий);
R10 – модернизировать лекционный курс;
R11 – проводить/усилить регулярный (текущий) опрос;
R12 – издать/переиздать учебно-методическое пособие по курсу;
R13 – ввести в обучение элементы игры/соревнования;
R14 – рассмотреть новейшие технологические разработки по теме;
R15 – изучить/углубить опыт ведущих университетов;
R16 – включить студентов в рамки НИР/ХД;
R17 – организовать контакт со студентами/преподавателями других вузов;
R18 – расширить рейтинговую систему оценки и рейтинговый контроль;
R19 – модифицировать сами материалы тестов;
R20 – выполнить анкетирование студентов для анализа слабых позиций в организации обучения;
R21 – расширить рамки использования материалов патентов и изобретений.

Детализация приведенных выше критериев и управляющих воздействий состоит в следующем (ограничиваемся критерием К1).

К1. Данный критерий формируется по следующим признакам:

- К₁₁** – непонимание формул, где фигурируют переменные (понятия), введенные в ранее изложенном материале;
К₁₂ – неверные ответы на вопросы, затрагивающие ранее изученный материал;
К₁₃ – ошибки в интерпретации единиц измерений;
К₁₄ – смешивание (подмена) понятий;
К₁₅ – плохое знание английских технических терминов.

На основании критерия К1 вырабатываем управление R1 (как основное), которое зависит от признаков К₁₁–К₁₅. Многопосылочную свёртку выполняем по условной нечеткой формуле

$$\mu(R1|\alpha_{11}K_{11} + \dots + \alpha_{15}K_{15}).$$

Для отыскания весов признаков составляем матрицу приоритетов Т. Саати (табл. 2).

Таблица 2. Матрица приоритетов Т. Саати
Table 2. Priorities matrix by T. Saati

Критерий / Criterion	K ₁₁	K ₁₂	K ₁₃	K ₁₄	K ₁₅	$\Pi_{ij}^{0,2}$	α_i
K ₁₁	1	1	3	3	6	$54^{0,2} \approx 2,2$	0,35
K ₁₂	1	1	3	3	6	$54^{0,2} \approx 2,2$	0,35
K ₁₃	1/3	1/3	1	1	2	$2/9^{0,2} \approx 0,74$	0,12
K ₁₄	1/3	1/3	1	1	2	$2/9^{0,2} \approx 0,74$	0,12
K ₁₅	1/6	1/6	1/2	1/2	1	$1/144^{0,2} \approx 0,37$	0,06

Допустим, получены следующие нечеткие оценки признаков:

$$\mu(K_{11}) = 0,6, \mu(K_{12}) = 0,8, \mu(K_{13}) = 0,8, \mu(K_{14}) = 0,5, \mu(K_{15}) = 0,6.$$

Находим $\mu(b) = 0,6 \cdot 0,35 + 0,8 \cdot 0,35 + 0,8 \cdot 0,12 + 0,5 \cdot 0,12 + 0,6 \cdot 0,06 = 0,682$. По формуле (5) получаем

$$\mu(R1|b) = (2\mu(R1) - 1)\mu(b) + 1 - \mu(R1). \quad (6)$$

Для принятия решения на основе формулы (6) необходима связь между величинами $\mu(R1|b)$ и $\mu(R1)$. Следуя [10], передадим такую связь матрицей нечеткого отношения «вход-выход» (табл. 3).

Таблица 3. Задание нечеткого отношения «вход-выход»
Table 3. Setting fuzzy relationship “input-output” matrix

Показатель / Index	$\mu(b)$	Степень коррекции / Degree of correction		
		незначительная $\mu(R1) = 0,3$ / insignificant $\mu(R1) = 0,3$	средняя $\mu(R1) = 0,6$ / average $\mu(R1) = 0,6$	значительная $\mu(R1) = 0,9$ / significant $\mu(R1) = 0,9$
S_{ij}	0–0,3	0,9	0,1	0
	0,3–0,6	0,3	0,5	0,1
	0,6–1,0	0	0,3	0,9

Табл. 3 заполняется экспертом и используется таким образом, чтобы установить значение $\mu(R1|b)$. В ячейках таблицы записаны нечеткие оценки S_{ij} целесообразности выставленного уровня регулирования R1 на входе b . Так, для входа, определенного в нижней строке табл. 3, имеет место $b \in [0,6-1,0]$ (в рассматриваемом случае $\mu(b) = 0,682$). Мера целесообразности S_{ij} незначительной степени коррекции процесса в части улучшения усвоения базовых понятий равна 0, средней – 0,3, значительной – 0,9. Произведем расчет на основе формулы (6) по каждому из трех вариантов:

$$\begin{aligned} \mu(R1) = 0,3, \mu(b) = 0,682, \mu(R1|b) &= 0,43; \\ \mu(R1) = 0,6, \mu(b) = 0,682, \mu(R1|b) &= 0,54; \\ \mu(R1) = 0,9, \mu(b) = 0,682, \mu(R1|b) &= 0,65. \end{aligned} \quad (7)$$

Заключительный шаг состоит в вычислении средневзвешенного по оценкам целесообразности уровня регулирования R1 по формуле

$$\mu(R_i | b) = \frac{\sum_{k=1,2,3} S_{ik} \mu(R_k | b)}{\sum_{k=1,2,3} S_{ik}}, \quad (8)$$

где $\mu(R_k|b)$ – соответствует вычисленным значениям (7): $\mu(R1_1|b) = 0,43$; $\mu(R1_2|b) = 0,54$; $\mu(R1_3|b) = 0,65$.

Получаем итоговую средневзвешенную оценку

$$\mu(R1|\mu(b) = 0,682) = (0 \cdot 0,43 + 0,3 \cdot 0,54 + 0,9 \cdot 0,65)/(0 + 0,3 + 0,9) \approx 0,63.$$

Вывод: уровень коррекции образовательного процесса в части улучшения усвоения базовых понятий имеет метрическое значение 0,63, т. е. ближе к среднему варианту. Другие критерии можно обрабатывать по аналогии (ввиду размеров статьи формальные примеры не приводятся). Детализация по существу состоит в следующем.

К2. Данный критерий формируется по следующим признакам:

- верные/неверные ответы на технические/программистские вопросы;
- допущение нереальных технических/программистских гипотез;
- плохие ответы на предложения по выбору технических/программистских решений;
- неверная оценка затрат на реализацию;
- незнание состояния дел в сфере;
- незнание фамилий известных специалистов;
- незнание сути применяемых технологий.

К3

1. Ответ менее, чем на половину вопросов.
2. Ответ на 60–70 % вопросов.
3. Ответ на 80–100 % вопросов.

К4

1. Процент ответов не по существу вопроса.
2. Акцентирование внимания на второстепенных/вторичных признаках.

К5

1. Время ответа значительно отклоняется от среднего по группе тестируемых.
2. Время ответа в пределах нормы.

К6

1. Нарушение логичности (алогичность) рассуждения.
2. Плохое представление сути задачи (отсутствие образности, неумение абстрагироваться).
3. Непонимание имеющихся закономерностей.

К7

1. Процент правильных ответов на вопросы повышенной сложности низкий.
2. Процент правильных ответов на вопросы повышенной сложности в пределах нормы.
3. Процент правильных ответов на вопросы повышенной сложности высокий.

К8

1. Число найденных закономерностей мало.
2. Пропущены элементы формул.
3. Описки.
4. Решение не доведено до конца.

К9

1. Способность правильно составлять алгоритм/план решения задачи.
2. Разработанные программные коды допускают зависание/неправильные входные данные.
3. Решение не имеет обоснования или обосновано неверно.

Заключение

1. Изложенный подход сочетает в себе достоинства метода Т. Саати и возможности формального выражения для условной нечеткой меры, к которой не применима теорема Байеса.

2. Линеаризация многопосылочной свёртки критериев достигается независимостью критериев. Это обеспечивает естественное использование линейной свёртки в формуле условной нечеткой меры.

3. Формула для условной нечеткой меры в непрерывном случае может быть переосмыслена с тем, чтобы заменить линейный сегмент графика на иной, допуская нелинейность (например, сигмоидного типа) в области, близкой к $b = 0,5$ и $b = 1,0$.

4. Можно рекомендовать использовать шкалу Харрингтона для разбиения интервала изменения условной нечеткой переменной. Шкала Харрингтона состоит из пяти интервалов единичного отрезка, характеризующих степень приближения к наилучшему (идеальному) варианту: очень высокая (0,8–1,0); высокая (0,63–0,80); средняя (0,37–0,63); низкая (0,20–0,37); очень низкая (0–0,20). Преимуществом ее использования является большая свобода выбора значения нечеткой меры с учетом мнения лица, принимающего решение (эксперта).

Список литературы

1. Герман, О. В. Логическое исчисление, использующее нечеткие формулы / О. В. Герман, А. А. Линник // Вестник БНТУ. 2005. № 5. С. 55–58.
2. Mamdani, E. H. An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller / E. H. Mamdani, S. Assilian // Int. J. Man Mach. Stud. 1975. No 7. P. 1–13.
3. Тэрано, Т. Прикладные нечеткие системы / Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. М.: Мир, 1993. 368 с.
4. Larsen, P. M. Industrial Applications of Fuzzy Logic Control / P. M. Larsen // International Journal of Man-Machine Studies. 1980. Vol. 12, No 1. P. 3–10.

5. Дюбуа, А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике / А. Дюбуа, Д. Прад. М.: Радио и связь, 1990. 284 с.
6. Заде, Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. Заде. М.: Мир, 1976. 165 с.
7. Izenman, A. J. *Modern Multivariate Statistical Techniques. Regression, Classification, and Manifold Learning* / A. J. Izenman. N.Y.: Springer, 2008. 757 p.
8. Герман, О. В. Многомерный нечеткий распознаватель на основе четкого распознавателя и его оценка / О. В. Герман, Н. Л. Боброва // Доклады БГУИР. 2013. № 6. С. 67–71.
9. Saati, T. *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the AHP* / T. Saati. Pitsburg: RWS Publication, 1994. 500 p.
10. Герман, О. В. Неклассические логические исчисления / О. В. Герман. Минск: Белор. гос. ун-т информ. и радиоэлектр., 2012. 124 с.

References

1. German O. V., Linnik A. A. (2005) Logical Calculus Using Fuzzy Formulas. *Vestnik BNTU*. (5), 55–58 (in Russian).
2. Mamdani E. H., Assilian S. (1975) An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller. *Int. J. Man Mach. Stud.* (7), 1–13.
3. Terano T., Asai K., Sugeno M. (1993) *Applied Fuzzy Systems*. Moscow, Mir Publ. 368 (in Russian).
4. Larsen P. M. (1980) Industrial Applications of Fuzzy Logic Control. *International Journal of Man-Machine Studies*. 12 (1), 3–10.
5. Dyubua A., Pradd D. (1990) *The Possibility Theory. Applications for Knowledge Representation in Informatique*. Moscow, Radio i Sviaz Publ. 284 (in Russian).
6. Zade L. (1976) *A Notion of Linguistical Variable and its Application to Approximate Decision Making*. Moscow, Mir Publ. 165 (in Russian).
7. Izenman A. J. (2008) *Modern Multivariate Statistical Techniques. Regression, Classification, and Manifold Learning*. N.Y., Springer Publ. 757.
8. German O. V., Bobrova N. L. (2013) Multidimensional Fuzzy Recognizer on the Basis of a Crisp Recognizer and its Estimation. *Doklady BGUIR*. (6), 67–71 (in Russian).
9. Saati T. (1994) *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the AHP*. Pitsburg, RWS Publication. 500.
10. German O. V. (2012) *Non-Classical Logical Calculi*. Minsk, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics Publ. 124 (in Russian).

Вклад авторов

Герман О. В. определил общую концепцию работы, написал введение.

Герман Ю. О. указала способ интеграции методики Т. Саати для получения интегрального значения многопосылочной части в нечеткой условной формуле, написала заключение.

Мигалевич С. А. продемонстрировал практическое использование условных нечетких формул для задач регулирования учебного процесса по результатам тестирования.

Кузнецов М. В. обосновал линеаризацию многопосылочной свёртки, рассмотрел существующие методы линеаризации.

Author's contribution

German O. V. defined the general concept of the work, wrote the introduction.

German Ju. O. indicated a way to integrate the T. Saati technique to obtain the integral value of the multi-variable part in a fuzzy conditional formula, wrote a conclusion.

Migalevich S. A. demonstrated the practical use of conditional fuzzy formulas for the tasks of regulating the educational process based on test results.

Kuznetsov M. V. substantiated the linearization of multi-variable convolution, considered the existing methods of linearization.

Сведения об авторах

Герман О. В., к. т. н., доцент кафедры информационных технологий автоматизированных систем Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

Герман Ю. О., к. т. н., доцент кафедры электронных вычислительных машин Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

Мигалевич С. А., начальник центра информатизации и инновационных разработок, соискатель кафедры программного обеспечения информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

Кузнецов М. В., аспирант кафедры информационных технологий автоматизированных систем Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,
г. Минск, П. Бровки, 6
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
Тел.: +375 29 612-42-32
E-mail: ovgerman@tut.by
Герман Олег Витольдович

Information about the authors

German O. V., Cand. of Sci., Associate Professor at the Department of Information Technologies of Automated Systems of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

German Ju. O., Cand. of Sci., Associate Professor at the Department of Electronic Computers of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

Migalevich S. A., Head of the Center of Informatization and Innovations, Applicant at the Department of Software Provision of Information Technologies of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

Kuznetsov M. V., Postgraduate at the Department of Information Technologies of Automated Systems of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,
Minsk, P. Brovki St., 6
Belarusian State University
of Informatics and Radioelectronics
Tel.: +375 29 612-42-32
E-mail: ovgerman@tut.by
German Oleg Vitoldovich