Статья посвящается 105-летию со дня рождения
профессора-геометра Ивана Петровича Егорова

СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЕ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА ПЕРВЫХ ТРЕХ ЛАКУНАРНОСТЕЙ ПО ГРУППАМ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ И ГОМОТЕТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

З. Н. ЧЕТЫРКИНА

Поступила в редакцию 25.01.2023

Аннотация. В статье рассматриваются римановы пространства, в касательных пространствах которых работают сразу четыре алгебраические структуры: вещественных чисел D_{m_1}, комплексных чисел C_{m_2}, кватернионов H_{m_3} и октионов O_{m_4}. Размерность пространства $n = m_1 + 2m_2 + 4m_3 + 8m_4$. Представлена картина лакунарных пространств V_n^{4a}, а также дана классификация метрик V_n^{4a} по группам изометрических G_r и гомотетических P_r движений (r – размерность группы). В порядках r этих групп встречаются пропуски – лакуны. Рассмотрены две лакуны и метрики пространств V_n^{4a} первых трех лакунарностей в смысле И. П. Егорова. Установлено, что среди порядков r-групп изометрий G_r и гомотетий P_r в специализированных римановых пространствах V_n^{4a} третьей лакунарности порядок $r_{3\max} - 1$ не осуществим, то есть обнаружена точечная лакунарность.

Ключевые слова: изометрия, гомотетия, группы изометрий и гомотетий, порядок групп, лакуны, пространства k-й лакунарности.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования. Четыркина, З. Н. Специализированные римановы пространства первых трех лакунарностей по группам изометрических и гомотетических движений / З. Н. Четыркина // Доклады БГУИР. 2023. Т. 21, № 3. С. 111–118.

SPECIALIZED RIEMANNIAN SPACES OF THE FIRST THREE LACUNARIES BY GROUPS OF ISOMETRIC AND HOMOTHETIC MOTIONS

ZINAIDA N. CHETYRKINA

Submitted 25.01.2023

Abstract. The article gives a classification of metrics of specialized Riemannian spaces, which carry four algebras at once in metrics D_{m_1} – real numbers, C_{m_2} – complex numbers, H_{m_3} – quaternions, O_{m_4} – octions. Dimension of spaces $n = m_1 + 2m_2 + 4m_3 + 8m_4$. The article presents a picture of lacunar spaces V_n^{4a} also a classification of metrics by groups of isometric G_r and homothetic P_r movements (r is the dimension of the group) is given. There are gaps in the orders r of these groups, which are called lacunae. Here are two lacunae and metrics of spaces V_n^{4a} of the first three lacunarities in the image of I. P. Egorov. It is established that among the orders of r-groups of isometries G_r and homoteties P_r in specialized Riemann spaces V_n^{4a} of the third lacunarity, there is one order $r_{3\max} - 1$, which is not feasible e. g. a punctate lacunarity was found.

Keywords: isometrie, homotetie, groups of isometries and homoteties, order of groups, lacunae, spaces of k-th lacunarity.

Conflict of interests. The author declares no conflict of interests.

For citation. Chetyrkina Z. N. (2023) Specialized Riemanian Spaces of the First Three Lacunaries by Groups of Isometric and Homothetic Motions. *Doklady BGUIR*. 21 (3), 111–118.

Введение

Пензенская школа И. П. Егорова изучала движения в различных геометрических пространствах [1–3]. О движениях в метрических пространствах рассказывается в публикациях [4, 5], а в [6] определен порядок полных групп движений в псевдоевклидовых E_n^{4a} и некоторых римановых пространствах V_n^{4a} второй лакунарности в смысле И. П. Егорова. В статье рассмотрены римановы пространства, в касательных пространствах которых работают сразу четыре алгебраические структуры: вещественных чисел D_{m_1}, комплексных чисел C_{m_2}, кватернионов H_{m_3} и октионов O_{m_4} (m_i – размерность действия соответствующей алгебры). Представлена картина лакунарных пространств V_n^{4a}, дана классификация метрик V_n^{4a} по группам изометрических G_r и гомотетических P_r движений (r – размерность группы).

Методика исследований

В [6] подробно описано, как в метрику псевдоевклидова пространства E_n

$$ds^2 = e_1(dx^1)^2 + e_2(dx^2)^2 + \ldots + e_i(dx^i)^2 + \ldots + e_n(dx^n)^2,\ e_i = \pm 1,\ i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

вводится действие сразу четырех алгебр: D_{m_1} – вещественной, C_{m_2} – комплексной, H_{m_3} – кватернионов, O_{m_4} – октионов [7]. Размерность пространства $n = m_1 + 2m_2 + 4m_3 + 8m_4$. Тогда метрика (1) принимает вид

$$\begin{gathered} ds^2 = e_{11}(dx^1)^2 + \ldots + e_{1m_1}(dx^{m_1})^2 + e_{21}dz^1dz^{1*} + \ldots + e_{2m_2}dz^{m_2}dz^{m_2*} + e_{31}dk^1dk^{1*} + \ldots \\ \ldots + e_{3m_3}dk^{m_3}dk^{m_3*} + e_{41}do^1do^{1*} + \ldots + e_{4m_4}do^{m_4}do^{m_4*},\ e_{\alpha i} = \pm 1,\ \alpha = \overline{1,4},\ i = \overline{1,m_\alpha}, \end{gathered} \tag{2}$$

где * – операция сопряжения в соответствующей алгебре.

Для сокращения последующих записей формул и удобства выводов введем следующие обозначения:

$$ds_1^2 = e_{11}(dx^1)^2 + \ldots + e_{1m_1}(dx^{m_1})^2; \tag{3}$$

$$ds_2^2 = e_{21}dz^1dz^{1*} + \ldots + e_{2m_2}dz^{m_2}dz^{m_2*}; \tag{4}$$

$$ds_3^2 = e_{31}dk^1dk^{1*} + \ldots + e_{3m_3}dk^{m_3}dk^{m_3*}; \tag{5}$$

$$ds_4^2 = e_{41}do^1do^{1*} + \ldots + e_{4m_4}do^{m_4}do^{m_4*}; \tag{6}$$

$$d\tilde{s}^2 = ds_2^2 + ds_3^2 + ds_4^2. \tag{7}$$

Тогда метрика (2) может быть представлена в виде

$$ds^2 = ds_1^2 + d\tilde{s}^2. \tag{8}$$

Примечательно, что метрическое пространство (2)–(8) в каждой точке x имеет образ цветка. В нем из точки x исходят:

$dx^1, dx^2, \ldots, dx^{m_1}$ – m_1 одномерных тычинок;

$dz^1, dz^2, \ldots, dz^{m_2}$ – m_2 двумерных лепестков;

$dk^1, dk^2, \ldots, dk^{m_3}$ – m_3 четырехмерных лепестков;

$do^1, do^2, \ldots, do^{m_4}$ – m_4 восьмимерных лепестков.

В [6] представлена полная группа изометрий G_r, сохраняющая метрику (2), а значит, и этот цветок в каждой точке x пространства (2). Размерность группы найдена

$$r_{1\max} = \frac{1}{2}m_1(m_1+1) + m_2(m_2+1) + \frac{7}{2}m_3(m_3+1) + 11m_4(m_4+1). \tag{9}$$

Оператор гомотетии для (1) $Y = x^1 p_1 + \ldots + x^n p_n$, $p_i = \partial / \partial x^i$, $i = \overline{1,n}$, работает и для метрики (2). Он этот цветок переводит в подобный ему цветок в любой точке x одинаково. Поэтому метрика (2) допускает группу гомотетий P_r порядка

$$r_{1\max} = \frac{1}{2} m_1 \left(m_1 + 1\right) + 1 + m_2 \left(m_2 + 1\right) + \frac{7}{2} m_3 \left(m_3 + 1\right) + 11 m_4 \left(m_4 + 1\right). \tag{10}$$

И. П. Егоров всегда интересовался лакунарностью (пропусками) в порядках полных групп движений в римановых пространствах V_n [1–3]. А задача автора данной статьи – в специализированных римановых пространствах V_n^{4a} найти первые две лакуны полных групп G_r и P_r и метрики V_n^{4a} первых трех лакунарностей в смысле И. П. Егорова. Так как в метрике V_n^{4a} вид $d\tilde{s}^2$ (7) всегда неизменный, а с лакунарностью V_n^{4a} меняется вид метрики ds_1^2, то воспользуемся результатами И. П. Егорова, опубликованными в [1–3]. Для сокращения дальнейших записей введем обозначение

$$N_* = m_2 \left(m_2 + 1\right) + \frac{7}{2} m_3 (m_3 + 1) + 11 m_4 \left(m_4 + 1\right). \tag{11}$$

Тогда формулы (9) и (10) запишутся в виде:

$$r_{1\max} = \frac{1}{2} m_1 \left(m_1 + 1\right) + N_*; \tag{9*}$$

$$r_{1\max} = \frac{1}{2} m_1 \left(m_1 + 1\right) + 1 + N_*. \tag{10*}$$

Первая лакуна – первый интервал запрещенных порядков для полных групп G_r в V_n^{4a} [1] имеет вид

$$r_{2\max} < r < r_{1\max}, \tag{12}$$

где

$$r_{2\max} = \frac{1}{2} m_1 \left(m_1 - 1\right) + 1 + N_*. \tag{13}$$

Первая лакуна содержит $m_1 - 2$ значения для больших значений m_1. С учетом [2] вторая лакуна – второй интервал запрещенных порядков для полных групп G_r в V_n^{4a} запишется в виде

$$r_{3\max} < r < r_{2\max} - 1, \tag{14}$$

где

$$r_{3\max} = \frac{1}{2} (m_1 - 1)\left(m_1 - 2\right) + 5 + N_*. \tag{15}$$

Это третий максимально допустимый порядок для группы изометрий G_r в V_n^{4a} после второй лакуны. Заметим, что лакунарная картина для групп гомотетий P_r в V_n^{4a} легко восстанавливается по лакунарной картине для групп изометрий, поскольку, если риманово пространство допускает группу гомотетий порядка r, то оно обязательно допускает группу изометрий порядка $r - 1$.

По терминологии И. П. Егорова пространство V_n^{4a} с метрикой (2) будем называть специализированным римановым пространством первой лакунарности в изометрическом и гомотетическом смыслах, так как порядки групп G_r и P_r в (2) предшествуют первым лакунам. После первой лакуны получаем отрезок конденсации возможных значений для r, состоящий из двух значений:

$$r \in \left[r_{2\max} - 1, r_{2\max}\right]. \tag{16}$$

Все пространства с группами изометрий и гомотетий порядка (16) назовем, согласно терминологии И. П. Егорова, пространствами второй лакунарности. Вторая лакуна для групп G_r и P_r в V_n^{4a} содержит $m_1 - 7$ запрещенных значений для r. Отрезок конденсации после второй лакуны содержит шесть возможных значений для r

$$r \in \left[r_{3\max} - 5, r_{3\max}\right]. \tag{17}$$

Все пространства с группами изометрий и гомотетий порядка (17) будем называть пространствами третьей лакунарности. Задача проводимых исследований – найти метрики V_n^{4a} второй и третьей лакунарностей.

Специализированные римановы пространства V_n^{4a} второй лакунарности

Запишем метрики пространств V_n^{4a} с группой изометрий порядка $r_{2\max}-1$:

$$ds^2 = b\left(x^1\right)[e_1(dx^1)^2 + e_2(dx^2)^2 + ... + e_{m_1}(dx^{m_1})^2] + d\tilde{s}^2,\ \forall b(x^1) \neq e^{ax^1} \forall a \neq 0;\ (x^1)^{-2};\ \text{const-}e; \quad (18)$$

$$ds^2 = b(x^1)\left[e_1(dx^1)^2 + e_2(dx^2)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2\right],\ \forall b\left(x^1\right) \neq e^{ax^1} \forall a \neq 0;\ (x^1)^{-2};\ \text{const-}e; \quad (19)$$

$$ds^2 = e^{2x^1}\left[e_1(dx^1)^2 + e_2(dx^2)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2\right] + d\tilde{s}^2,\ Y = p_1 + x^{m_1+1}p_{m_1+1} + \ldots + x^n p_n; \quad (20)$$

$$ds^2 = e^{2x^1}\left[e_1(dx^1)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2\right],\ Y = p_1; \quad (21)$$

$$ds^2 = 2dx^1dx^2 + a\left(x^1\right)\left[e_3(dx^3)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2\right] + d\tilde{s}^2; \quad (22)$$

$$ds^2 = 2dx^1dx^2 + a\left(x^1\right)\left[e_3(dx^3)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2\right]. \quad (23)$$

В двух последних случаях $\forall a\left(x^1\right) \neq \text{const-}e$ и имеются особые операторы: $X_1 = p_2$, $X_\alpha = e_\alpha x^\alpha p_2 - \int \frac{dx^1}{a\left(x^1\right)} p_\alpha$, $\alpha = \overline{3, m_1}$, $Y = 2x^2 p_2 + x^3 p_3 + \ldots + x^n p_n$.

Запишем метрику:

$$ds^2 = a\left(x^1\right)2dx^1dx^2 + e_3(dx^3)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2; \quad (24)$$

$$\forall a\left(x^1\right) \neq e^{2x^1};\ (x^1)^b;\ \frac{e^{-2\alpha\,\mathrm{arctg}\,x^1}}{1+(x^1)^2};\ \frac{e^{\frac{\alpha}{x^1}}}{(x^1)^2};\ \frac{\left(x^1-1\right)^{\alpha-1}}{\left(x^1+1\right)^{\alpha+1}};\ \forall \alpha, b \in D, b \neq 0;\ \alpha\left(x'\right) \neq \text{const-}e. \quad (25)$$

Для (24) при условии (25) особые операторы: $X_1 = p_2$, $X_\alpha = e_\alpha x^\alpha p_2 - \int a(x^1)dx^1 p_\alpha$, $\alpha = \overline{3, m_1}$. В следующих метриках особыми операторами являются $X_1 = p_2$, $X_\alpha = e_\alpha x^\alpha p_2 - x^1 p_\alpha$, $\alpha = \overline{3, m_1}$:

$$ds^2 = a\left(x^1\right)\left[2dx^1dx^2 + e_3(dx^3)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2\right] + d\tilde{s}^2; \quad (26)$$

$$ds^2 = a\left(x^1\right)\left[2dx^1dx^2 + e_3(dx^3)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2\right], \quad (27)$$

где $a(x^1)$ – при условии (25).

При всех значениях функции $a(x^1)$ метрики (24), (26), (27) имеют оператор гомотетии $Y = 2x^2 p_2 + x^3 p_3 + \ldots + x^n p_n$. В метриках (20)–(24), (26), (27) работает группа гомотетий порядка $r_{2\max} - 1$. В следующих метриках действуют только группы изометрий порядка $r_{2\max}$, а гомотетий в них нет:

$$ds^2 = e_1\frac{(dx^1)^2}{(x^1)^2} + e_2(dx^2)^2 + \ldots + e_{m_2}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2,\ X = x^1 p_1; \quad (28)$$

$$ds^2 = \frac{1}{(x^1)^2}\left[e_1(dx^1)^2 + e_2(dx^2)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2\right] + d\tilde{s}^2,\ X = x^1 p_1 + \ldots + x^{m_1} p_{m_1}; \quad (29)$$

$$ds^2 = \frac{1}{(x^1)^2}\left[e_1(dx^1)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2\right],\ X = x^1 p_1 + \ldots + x^n p_n; \quad (30)$$

$$ds^2 = b\left(x^1\right)e_1(dx^1)^2 + e_2(dx^2)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2,\ \forall b\left(x^1\right) \neq e^{ax^1},\ \alpha \neq 0;\ (x^1)^{-2};\ \text{const-}e, \quad (31)$$

где $X = \left[b\left(x^1\right)\right]^{\frac{-1}{2}} p_1$; $b(x^1) \neq e^{ax^1}$; const-e.

При $b(x^1) = e^{ax^1}$, где a – любое число, отличное от нуля, метрика (31) допускает еще и оператор гомотетии $Y = p_1 + \frac{a}{2}\left(x^2 p_2 + \ldots + x^n p_n\right)$. Римановы пространства V_n^{4a} с группами изометрий и гомотетий максимального порядка $r_{2\max}$ имеют метрики (24), (26), (27), если выполняются условия:

$$a(x^1)=e^{2x^1};\ (x^1)^b,\ \ b\neq 0;\ \frac{e^{-2\alpha \operatorname{arctg} x^1}}{1+(x^1)^2};\ \frac{e^{\frac{\alpha}{x^1}}}{(x^1)^2};\ \frac{\left(x^1-1\right)^{\alpha-1}}{\left(x^1+1\right)^{\alpha+1}};\ \forall b,\alpha\in D. \tag{32}$$

Тогда дополнительно к случаю (25) появляется еще один оператор изометрии [5, 8]. В итоге имеется 13 классов пространств V_n^{4a} второй лакунарности.

Специализированные римановы пространства V_n^{4a} третьей лакунарности

Эти специализированные римановы пространства допускают группы изометрий и гомотетий порядка (17). Рассмотрим метрики V_n^{4a} с группами изометрий G_r порядка $r_{3\max}-5$:

$$ds^2=k\left(x^1,x^2\right)\left[e_1(dx^1)^2+e_2(dx^2)^2\right]+e_3(dx^3)^2+\ldots+e_{m_1}(dx^{m_1})^2+d\tilde{s}^2; \tag{33}$$

$$ds^2=k\left(x^1,x^2\right)\left[e_1(dx^1)^2+e_2(dx^2)^2+e_3(dx^3)^2+\ldots+e_{m_1}(dx^{m_1})^2\right]+d\tilde{s}^2; \tag{34}$$

$$ds^2=k\left(x^1,x^2\right)\left[e_1(dx^1)^2+e_2(dx^2)^2+e_3(dx^3)^2+\ldots+e_{m_1}(dx^{m_1})^2+d\tilde{s}^2\right], \tag{35}$$

где $\forall k\left(x^1,x^2\right)\neq k_1\left(x^1\right)k_2\left(x^2\right);$ const-e.

Следует отметить, что если $k\left(x^1,x^2\right)=e^{\alpha x^1+\beta x^2},\ \left(\alpha,\beta\right)\neq\left(0,0\right),$ то метрики (33)–(35) допускают группы изометрий G_r и гомотетий P_r порядка $r_{3\max}-4$. Сами метрики (33)–(35) имеют операторы гомотетии и изометрии соответственно вида:

$$Y_1=p_1+p_2+\frac{\alpha+\beta}{2}\left(x^3p_3+\ldots+x^np^n\right),\ X=\beta p_1-\alpha p_2;$$

$$Y_2=p_1+p_2+\frac{\alpha+\beta}{2}\left(x^{m_1+1}p_{m_1+1}+\ldots+x^np^n\right),\ X=\beta p_1-\alpha p_2;$$

$$Y_3=p_1+p_2,\ X=\beta p_1-\alpha p_2.$$

Для дальнейшего упрощения изложения воспользуемся сначала метриками всех пространств V_n^{4a} второй лакунарности, записав их как $ds_{\|}^2(dx^1,\ldots,dx^{m_1})$. В данной статье рассмотрены два сорта метрик: $ds_{\|}^2(dx^1,\ldots,dx^{m_1})=ds_{\|1)}^2\left(dx^1,\ldots,dx^{m_1}\right)+ds_{\|2)}^2\left(dx^1,\ldots,dx^{m_1}\right)$. Метрика сорта 1 (формулы (18), (20), (22), (24), (26), (28), (29), (31)) имеет вид

$$ds_{\|1)}^2\left(dx^1,\ldots,dx^{m_1}\right)=ds_{V_{m_1}}^2\left(dx^1,\ldots,dx^{m_1}\right)+d\tilde{s}^2.$$

В метрике первого сорта $ds_{\|1)}^2\left(dx^1,\ldots,dx^{m_1}\right)$ имеются два слагаемых: первое – метрика риманова пространства V_{m_1} второй лакунарности, второе – $d\tilde{s}^2$. В метрике второго сорта $ds_{\|2)}^2\left(dx^1,\ldots,dx^{m_1}\right)$ слагаемое $d\tilde{s}^2$ не стоит самостоятельно (формулы (19), (21), (23), (27), (30)). Тогда 26 типов полученных пространств V_n^{4a} с группами изометрий и гомотетий порядков $r_{3\max}-5$ и $r_{3\max}-4$ имеют метрики:

$$ds^2=c\left(x^{m_1}\right)\left[e_{m_1}\left(dx^{m_1}\right)^2+ds_{V_{m_1-1}}^2\left(dx^1,\ldots,dx^{m_1-1}\right)\right]+d\tilde{s}^2; \tag{36}$$

$$ds^2=c\left(x^{m_1}\right)\left[e_{m_1}\left(dx^{m_1}\right)^2+ds_{V_{m_1-1}}^2\left(dx^1,\ldots,dx^{m_1-1}\right)+d\tilde{s}^2\right]; \tag{37}$$

$$ds^2=c\left(x^{m_1}\right)\left[e_{m_1}\left(dx^{m_1}\right)^2+ds_{\|2)}^2(dx^1,\ldots,dx^{m_1-1})\right];\ \ \forall c\left(x^{m_1}\right)\neq\text{const}. \tag{38}$$

Если $c(x^1)=e^{\alpha x^{m_1}},\ \alpha\neq 0,$ то у выписанных метрик возникают соответственно следующие операторы гомотетии: $Y_4=p_{m_1}+\dfrac{\alpha}{2}\left(x^{m_1+1}p_{m_1+1}+\ldots+x^np^n\right),\ Y_5=p_{m_1},\ Y_6=p_{m_1}.$ А метрики вида

$$ds^2 = c\left(x^{m_1}\right)e_{m_1}\left(dx^{m_1}\right)^2 + ds_{\|}^2(dx^1,\ldots,dx^{m_1-1}) \tag{39}$$

при $\forall c\left(x^{m_1}\right) \neq \text{const-}e$ имеют оператор изометрии $X = \dfrac{p_{m_1}}{\sqrt{c\left(x^{m_1}\right)}}$, а при $c\left(x^{m_1}\right) = e^{\beta x^{m_1}},\ \beta \neq 0,$ и оператор гомотетии, но лишь иногда. Формула (39) дает метрики V_n^{4a} с группами G_r и P_r порядков $r_{3\max} - 4$, $r_{3\max} - 3$ в тех случаях, если $ds_{\|}^2(dx^1,\ldots,dx^{m_1-1})$ видов (18)–(24), (26)–(31).

Следующие метрики допускают группы изометрий и гомотетий порядка $r_{3\max} - 4$:

$$ds^2 = e^{2x^1}\left[e_1(dx^1)^2 + e_2(dx^2)^2\right] + e_3(dx^3)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2,\ X = p_2,\ Y = p_1 + x^3 p_3 + \ldots + x^n p_n; \tag{40}$$

$$ds^2 = e^{2x^1}\left[e_1(dx^1)^2 + c\left(x^2\right)(dx^2)^2\right] + e_3(dx^3)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2,\ X = \left[c\left(x^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}} p_2,$$
$$Y = p_1 + x^3 p_3 + \ldots + x^n p_n; \tag{41}$$

$$ds^2 = e^{x^1 + x^2}\left[e_1(dx^1)^2 + e_2(dx^2)^2\right] + e_3(dx^3)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2,\ X = p_1 - p_2,$$
$$Y = p_1 + p_2 + x^3 p_3 + \ldots + x^n p_n. \tag{42}$$

Запишем метрику

$$ds^2 = b\left(x^1\right)e_1(dx^1)^2 + c\left(x^2\right)e_2(dx^2)^2 + e_3(dx^3)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2, \tag{43}$$

где $\forall b\left(x^1\right);\ c\left(x^2\right) \neq \text{const-}e$.

В метрике (43) дополнительными операторами являются $X_1 = \dfrac{p_1}{\left[b\left(x^1\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$, $X_2 = \dfrac{p_2}{\left[c\left(x^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$, которые допускают группы G_r и иногда P_r порядка $r_{3\max} - 3$ (P_r возникает, когда $b(x^1) = e^{\alpha x^1},\ c(x^2) \neq e^{\beta x^2}$, $(\alpha, \beta) \neq (0,\ 0)$).

Согласно формулам (22), (23), можно записать такие метрики:

$$ds^2 = 2dx^1 dx^2 + e_3(dx^3)^2 + a\left(x^1\right)\left[e_4(dx^4)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2\right] + d\tilde{s}^2; \tag{44}$$

$$ds^2 = 2dx^1 dx^2 + e_3(dx^3)^2 + a\left(x^1\right)\left[e_4(dx^4)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2\right], \tag{45}$$

где $\forall a\left(x^1\right) \neq \text{const-}e$.

Дополнительные операторы для (44), (45) – $Y = 2x^2 p_2 + x^3 p_3 + \ldots + x^n p_n$, $X_1 = p_2$, $X_2 = p_3$, $X_3 = e_3 x^3 p_2 - x^1 p_3$, $X_\alpha = e_\alpha x^\alpha p_2 - \int \dfrac{dx^1}{a\left(x^1\right)} p_\alpha$, $\alpha = \overline{4, m_1}$. Допускающие группы G_r и P_r здесь порядка $r_{3\max} - 3$.

У метрики

$$ds^2 = a\left(x^1\right)\left[2dx^1 dx^2 + e_3(dx^3)^2\right] + e_4(dx^4)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2 \tag{46}$$

дополнительными особыми операторами будут $X_\alpha = e_\alpha x^\alpha p_2 - \int a(x^1) dx^1 p_\alpha$, $\alpha = \overline{4, m_1}$ и для случаев (25), (32) получим для (46) группы изометрий и гомотетий порядков $r_{3\max} - 3$, $r_{3\max} - 2$.

Формулы (26) и (27) дают такие метрики:

$$ds^2 = a\left(x^1\right)\left[2dx^1 dx^2 + e_3(dx^3)^2 + \ldots + e_{m_{1-1}}(dx^{m_{1-1}})^2\right] + d\tilde{s}^2 + e_{m_1}(dx^{m_1})^2; \tag{47}$$

$$ds^2 = a\left(x^1\right)\left[2dx^1 dx^2 + e_3(dx^3)^2 + \ldots + e_{m_{1-1}}(dx^{m_{1-1}})^2 + d\tilde{s}^2\right] + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 \tag{48}$$

с дополнительными операторами $X_1 = p_{m_1}$, $X_2 = e_{m_1} x^{m_1} p_2 - \int a(x^1) dx^1 p_{m_1}$. И метрики (47), (48) для случаев (25) и (32) дают группы G_r и P_r порядков $r_{3\max} - 3$ и $r_{3\max} - 2$ соответственно.

Далее получим нужные метрики, комбинируя метрику V_{n-4}^{4a} $ds_v^2 = e_5(dx^5)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2$ с метрикой V_4, когда в ней имеются два слагаемых видов $2dx^1dx^2$, $2dx^3dx^4$ или подобные им.

Для метрики

$$ds^2 = a\left(x^1\right)2dx^1dx^2 + b\left(x^3\right)2dx^3dx^4 + e_5(dx^5)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2 \tag{49}$$

дополнительные операторы $X_{\alpha 12} = e_\alpha x^\alpha p_2 - \int a(x^1)dx^1 p_\alpha$, $X_{\alpha 34} = e_\alpha x^\alpha p_4 - \int b(x^3)dx^3 p_\alpha$, $\alpha = \overline{5, m_1}$, $X_3 = \int b(x^3)dx^3 p_2 - \int a(x^1)dx^1 p_4$, функции $a\left(x^1\right)$, $b\left(x^3\right)$ видов (25), (32), а группы изометрий G_r и гомотетий P_r – порядков $r_{3\max} - 5$, $r_{3\max} - 4$, $r_{3\max} - 3$.

У метрики

$$ds^2 = 2dx^1dx^2 + 2dx^3dx^4 + e^{2x^4}(dx^2)^2 + e_5(dx^5)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2 \tag{50}$$

дополнительными операторами являются $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2$, $X_3 = p_3$, $X_4 = p_4 - x^2p_2 + x^1p_1$, $X_5 = x^2p_3 - x^4p_1$, $X_{\alpha 12} = e_\alpha x^\alpha p_1 - x^2 p_\alpha$, $X_{\alpha 34} = e_\alpha x^\alpha p_3 - x^4 p_\alpha$, $\alpha = \overline{5, m_1}$, $Y = p_4 + 2x^1p_1 + 2x^3p_3 + {}$ $+ x^5p_5 + \ldots. + x^n p_n$, а группы изометрий и гомотетий – порядка $r_{3\max} - 3$.

Результаты исследований

По результатам исследований прослеживается следующая тенденция. Если взять метрику Егоровой [9]

$$ds^2 = 2dx^1dx^4 + 2dx^2dx^3 + (x^4)^2(dx^2)^2,$$

допускающую полные группы изометрий G_8 и гомотетий P_9, то получим метрику

$$ds^2 = 2dx^1dx^4 + 2dx^2dx^3 + (x^4)^2(dx^2)^2 + e_5(dx^5)^2 + \ldots + e_{m_1}(dx^{m_1})^2 + d\tilde{s}^2, \tag{51}$$

которая допускает группы изометрий и гомотетий максимального порядка – $r_{3\max}$.

Дополнительные операторы для метрики (51):

– изометрии: $X_{\alpha 14} = e_\alpha x^\alpha p_1 - x^4 p_\alpha$, $X_{\alpha 23} = e_\alpha x^\alpha p_3 - x^3 p_\alpha$, $\alpha = \overline{5, m_1}$;

– гомотетии: $Y = 3x^1p_1 + x^2p_2 + 3x^3p_3 + x^4p_4 + 2(x^5p_5 + \ldots + x^np_n)$.

Необходимо отметить, что порядок $r_{3\max} - 1$ для групп изометрий и гомотетий в специализированных римановых пространствах оказался не осуществим. Следовательно, существует точечная лакуна $r = r_{3\max} - 1$ в порядках полных групп изометрий G_r и гомотетий P_r в специализированных римановых пространствах V_{n-4}^{4a} третьей лакунарности.

Вывод

При рассмотрении картины метрик всех пространств первых трех лакунарностей по группам движений установлено, что в силу действия комплексной алгебры для метрики ds в них обнаружена точечная лакуна в порядках групп движений в пространствах третьей (и только) лакунарности.

Список литературы

1. Егоров, И. П. Римановы пространства второй лакунарности / И. П. Егоров // Доклады Академии наук СССР. 1956. Т. 111, № 2. С. 276–279.
2. Егоров, И. П. О пространствах первых трех лакунарностей в гомотетическом смысле / И. П. Егоров // Доклады Академии наук СССР. 1963. Т. 150, № 4. С. 730–732.
3. Егоров, И. П. Автоморфизмы в обобщенных пространствах / И. П. Егоров // Итоги науки и техники. Серия: Проблемы геометрии. 1978. № 10. С. 147–191.
4. Четыркина, З. Н. Гомотетии и движения в двумерных финслеровых пространствах / З. Н. Четыркина // Волжский математический сборник. 1966. № 5. С. 366–373.
5. Четыркина, З. Н. Пространства Рандерса первой лакунарности и максимально подвижные финслеровы пространства / З. Н. Четыркина // Известия высших учебных заведений. Математика. 1984. № 11. С. 53–56.

6. Четыркина, З. Н. О максимальных порядках групп изометрических и гомотетических движений в метрических пространствах, допускающих в своей метрике вещественную, комплексную и гиперкомплексные алгебраические структуры / З. Н. Четыркина // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. 2021. Т. 1, № 57. С. 27–34.
7. Розенфельд, Б. А. Геометрия групп Ли / Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский. М.: Изд-во МЦНМО, 2003.
8. Лаптев, Б. Л. Производная Ли для объектов, являющихся функциями точки и направления / Б. Л. Лаптев // Известия физико-математического общества. Казань. 1938. № 10. С. 3–38.
9. Егорова, Л. И. Об однородных гомотетических пространствах / Л. И. Егорова // Материалы 5-й науч.-техн. конф. Секция математики. ПВАИУ. 1970. С. 29–31.

References

1. Egorov I. P. (1956) Rimanov Spaces of the Second Lacunarity. *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. 111 (2), 276–279 (in Russian).
2. Egorov I. P. (1963) On the Spaces of the First Three Lacunaries in the Homothetic Sense. *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. 150 (4), 730–732 (in Russian).
3. Egorov I. P. (1978) Automorphisms in Generalized Spaces. *Results of Science and Technology. Series: Problems of Geometry*. (10), 147–191 (in Russian).
4. Chetyrkina Z. N. (1966) Homotheties and Motions in Two-Dimensional Finsler Spaces. *Volga Mathematical Collection*. (5), 366–373 (in Russian).
5. Chetyrkina Z. N. (1984) Randers Spaces of First Lacunarity and Maximally Mobile Finsler Spaces. *News of Higher Educational Institutions. Mathematics*. (11), 53–56 (in Russian).
6. Chetyrkina Z. N. (2021) On the Maximum Orders of Groups That are Isometric and Homothetic Moves in Metric Spaces That Admit Real, Complex, and Hypercomplex Algebraic Structures in their Metric. *Bulletin of Mogilev State University named after A. A. Kuleshov*. 1 (57), 27–34 (in Russian).
7. Rosenfeld B. A., Zamakhovsky M. P. (2003) *Geometry of Lie Groups*. Moscow, MTsNMO Publ. (in Russian).
8. Laptev B. L. (1938) Lie Derivative for Objects That Are Functions of a Point and a Direction. *Proceedings of the Physical and Mathematical Society*. *Kazan*. (10), 3–38 (in Russian).
9. Egorova L. I. (1970) On Homogeneous Homothetic Spaces. *Materials of the 5th Scientific and Technical Conference: Section of Mathematics. PVAIU*. 29–31 (in Russian).

Сведения об авторе

Четыркина З. Н., к. ф.-м. н., доцент

Адрес для корреспонденции

220036, Республика Беларусь,
г. Минск, ул. Кунцевщина, 36–580
Тел.: +375 29 275-24-64
E-mail: guseinaas@yandex.ru
Четыркина Зинаида Никандровна

Information about the author

Chetyrkina Z. N., Cand. of Sci., Associate Professor

Address for correspondence

220036, Republic of Belarus,
Minsk, Kunsevchina St., 36–580
Tel.: +375 29 275-24-64
E-mail: guseinaas@yandex.ru
Chetyrkina Zinaida Nikandrovna