



<http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2022-20-1-5-13>

Оригинальная статья
Original paper

УДК 004.932:004.258

ИТЕРАЦИОННОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ОБРАЗОВ ОШИБОК ДЛЯ СИНДРОМНО-НОРМЕННОГО ДЕКОДИРОВАНИЯ ИТЕРАТИВНЫХ КОДОВ

С.Х. ЖЭНЬ, В.К. КОНОПЕЛЬКО, В.Ю. ЦВЕТКОВ

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
(г. Минск, Республика Беларусь)*

Поступила в редакцию 1 июля 2021

© Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 2022

Аннотация. Рассматривается задача двухмерного синдромно-норменного декодирования итеративных кодов на основе библиотеки образов ошибок. При двухмерном кодировании кодовая последовательность преобразуется в кодовую матрицу, для строк и столбцов которой формируются проверочные коды. В декодере местоположение ошибок в кодовой матрице представляется образом ошибок. Декодирование основано на вычислении синдрома, нормы и использовании библиотеки образов ошибок для коррекции ошибок. Библиотека состоит из базовых образов, которые являются порождающими для подмножеств образов ошибок с одинаковыми нормами и хранятся в памяти. Образы подмножества формируются на основе базового образа с помощью перестановок строк и столбцов. Норма, вычисляемая на основе синдрома, однозначно определяет базовый образ и соответствующее подмножество образов ошибок, что сокращает пространство поиска по синдрому до подмножества. Синдром при этом используется в качестве адреса для извлечения из памяти конкретного образа ошибок и правила коррекции. С ростом кратности ошибок увеличивается размер библиотеки образов ошибок и возрастает вычислительная сложность ее формирования. В результате известные методы формирования библиотеки образов ошибок становятся неэффективными. В статье предложены математическая модель, структура генератора и алгоритм формирования библиотеки образов ошибок на основе итерационного расширения матриц базовых образов ошибок, позволяющего на порядки сократить число формируемых избыточных образов ошибок и существенно уменьшить вычислительную сложность по сравнению с известными подходами. Выигрыш прогрессивно увеличивается с ростом кратности ошибок.

Ключевые слова: помехоустойчивое кодирование, итеративные коды, синдром, норма, синдромно-норменное декодирование, библиотека образов ошибок.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования. Жэнь С.Х., Конопелько В.К., Цветков В.Ю. Итерационное формирование образов ошибок для синдромно-норменного декодирования итеративных кодов. Доклады БГУИР. 2022; 20(1): 5-13.

ITERATIVE SHAPING OF ERROR PATTERNS FOR NORMAL SYNDROME DECODING OF ITERATIVE CODES

XUN XUAN REN, VALERY K. KANAPELKA, VIKTAR YU. TSVIATKOU

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (Minsk, Republic of Belarus)

Submitted 1 July 2021

© Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2022

Abstract. The problem of two-dimensional syndrome-norm decoding of iterative codes based on a library of error patterns is considered. In two-dimensional coding, sequence code is first transformed into a code matrix, and then the row and column check code are calculated. In the decoder, the error position of the two-dimensional can be obtained by the operations that first calculate the syndromes and norms, then match with the error patterns in the existing library. The error pattern library is stored in the memory and generated by the subset of the error pattern. Subset patterns are generated from the base pattern using row and column permutations. The norm calculated based on the syndrome unambiguously determines the base pattern and the corresponding subset of error patterns, which reduces the search space for the syndrome to a subset. In this case, the syndrome is used as an address for retrieving a specific error pattern and correction rule from the memory. With the error rate increased, the size of the error pattern library is raised and the computational complexity of its formation is enlarged. As a result, the known methods for generating the error pattern library become non sufficient. This paper proposed a mathematical model, a generator structure, and an algorithm for fast generation of an error pattern library based on the iterative expansion of the error patterns, which makes it possible to reduce the number of generated redundant error patterns by orders of magnitude and significantly shorten the computational complexity in comparison with the known approaches.

Keywords: error-correcting coding, iterative codes, syndrome, norm, syndromic-norm decoding, library of error patterns.

Conflict of interests. The authors declare no conflict of interests.

For citation. Ren X.H., Kanapelka V.K., Tsviatkou V.Yu. Iterative Shaping of Error Patterns For Normal Syndrome Decoding of Iterative Codes. Doklady BGUIR. 2022; 20(1): 5-13.

Введение

Для исправления ошибок в системах передачи и хранения данных широкое распространение получили итеративные коды. Они формируются в виде проверочных кодов $C_1(n_1, k_1, d_1)$ и $C_2(n_2, k_2, d_2)$ для соответственно строк и столбцов исходной кодовой матрицы $n_1 \times n_2$, где n – длина кода; k – число информационных символов; $d = d_1 \cdot d_2 \geq 2t + 1$ – кодовое расстояние кода произведения; t – кратность корректируемых ошибок. Местоположение ошибок в кодовой матрице представляется образом ошибок – бинарной матрицей, в которой единичные элементы соответствуют ошибочным символам.

Декодирование итеративных кодов осуществляется в два или три этапа. Двухэтапное декодирование кодов Хемминга $C_1(7, 4, 3)$ и $C_2(7, 4, 3)$ обеспечивает исправление по одной ошибке в каждой строке и столбце, кроме случая, когда образ ошибок представлен четырьмя единицами в вершинах прямоугольника [1–3]. Трехэтапное декодирование теми же кодами [4, 5] снимает ограничение на структуру образа ошибок.

Двух- и трехэтапное декодирование кодов Хемминга основано на вычислении синдрома, который используется в качестве адреса для извлечения исправляющего кода из таблицы коррекции. Такой подход обеспечивает высокую скорость декодирования при относительно низкой пространственной сложности с учетом малого размера кодовой матрицы. Однако с увеличением размера кодовой матрицы и кратности ошибок коды Хемминга становятся неэффективными.

В этом случае используются БЧХ-коды, декодирование которых основано на решении системы полиномиальных уравнений, что связано с существенной временной сложностью [6–8].

Для ускорения декодирования БЧХ и других кодов по трехэтапной схеме в [9] предложен синдромно-норменный метод на основе норм синдромов и библиотеки образов ошибок. Библиотека состоит из базовых образов, соответствующих подмножествам образов ошибок с одинаковыми идентификационными параметрами. Любой образ ошибок в подмножестве можно сформировать в результате перестановок строк и столбцов соответствующего базового образа. Норма, вычисляемая на основе синдрома, однозначно определяет базовый образ и соответствующее подмножество образов ошибок, что сокращает пространство поиска по синдрому до подмножества. Вычислительная сложность формирования библиотеки образов ошибок в значительной степени определяет эффективность данного метода декодирования.

Для формирования библиотеки образов ошибок при синдромно-норменном декодировании итеративных кодов в [10, 11] предложен ранговый метод, основанный на синтезе исходного множества всех возможных матриц с заданным числом единиц, определяющим кратность ошибок, и прореживании исходного множества с помощью четырех параметров минимизации, учитывающих ранг и распределение единиц в строках и столбцах исходной матрицы. Из-за большого объема исходного множества и числа операций по его минимизации ранговый метод имеет высокую временную и пространственную сложность. Позиционный подход к формированию библиотеки образов ошибок [12], использующий меньший размер исходного множества и упрощенные условия минимизации, не позволяет существенно снизить вычислительную сложность.

Целью работы является уменьшение вычислительной сложности формирования библиотеки образов ошибок для трехэтапного синдромно-норменного декодирования итеративных кодов при больших значениях кратности ошибок.

Постановка задачи

В схеме синдромно-норменного декодирования итеративных кодов [9] (рис. 1) для кодовой матрицы вычисляются синдромы и нормы строк и столбцов. На основе норм с помощью кодов $C_1(n_1, k_1, d_1)$ и $C_2(n_2, k_2, d_2)$ определяются кратности ошибок, число ошибочных строк и столбцов. Они используются для определения идентификационных параметров, с помощью которых определяются образ ошибок и правила коррекции.

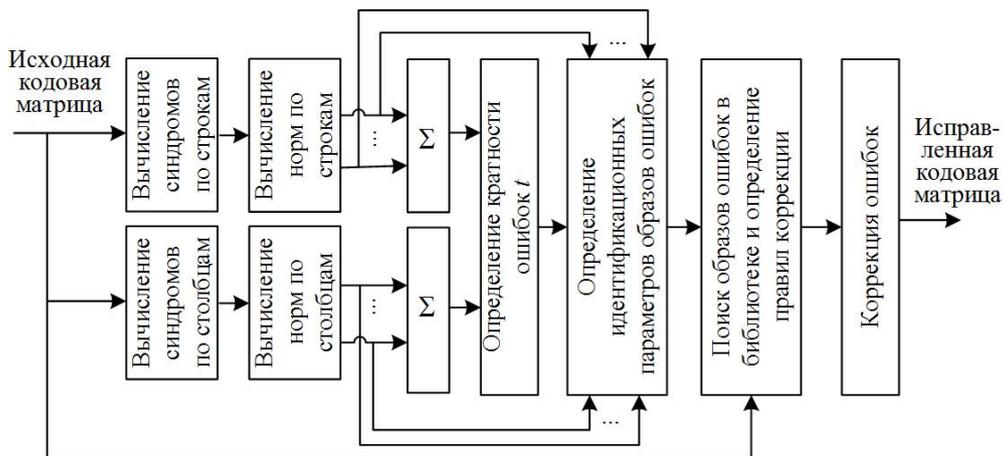


Рис. 1. Структурная схема синдромно-норменного декодирования итеративных кодов

Fig. 1. Block diagram of syndromic-norm decoding of iterative codes

Библиотека образов ошибок представляет собой множество матриц $\{M_R(n)\}_{(n=1, N(t))}$, которые описываются следующей математической моделью:

$$M_R(n) = \|m_R(n, i, j)\|_{(i=\overline{1,t}, j=\overline{1,t})}, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^t m_R(n, i, j) = t, \quad (2)$$

$$\neg \exists n_1 \neg \exists n_2 (M_R(n_1)) = f_{RT}(f_{CT}(M_R(n_2), j_c), i_r) \text{ при } j_c = \overline{1, T}, i_r = \overline{1, T}, \quad (3)$$

где $N(t)$ – число образов ошибок (табл. 1); f_{RT} – функция перестановки строк; f_{CT} – функция перестановки столбцов; T – число перестановок, $T = C_t^2$; i_r, j_c – номера перестановок строк и столбцов.

Таблица 1. Количество образов ошибок при $t = 2 - 9$
Table 1. Number of error patterns when $t = 2 - 9$

Количество образов	Кратность образов (размер матрицы) ошибок t							
	2	3	4	5	6	7	8	9
$N(t)$	3	6	16	34	90	212	558	1430
$N_R(t)$	6	84	1820	53130	1947792	85900584	4426165368	260887834350
$N_o(t)$	3	28	455	10626	324632	12271512	553270671	28987537150
$N_d(t)$	2	14	52	210	620	2150	6498	21535

Ранговый метод [10] формирования образов ошибок основан на следующей математической модели:

$$\{M_R(n)\}_{(n=\overline{1,N})} = f_M \left(\{M_T(n_r), p_{Rank}(n_r), p_{RE}(n_r), p_{CE}(n_r), p_{Ws}(n_r)\}_{(n_r=\overline{1, N_R(t)})} \right), \quad (4)$$

где $M_T(n_r)$ – исходная матрица, удовлетворяющая условию (2), $N_R(t) = t^2! / (t^2 - t)!t!$ – число исходных матриц; f_M – функция минимизации образов, которая выбирает из исходного множества $\{M_T(n_r)\}_{(n_r=\overline{1, N_R(t)})}$ матрицы $M_T(n_r)$, параметры минимизации $\{p_{Rank}(n_r), p_{RE}(n_r), p_{CE}(n_r), p_{Ws}(n_r)\}$ которых не совпадают; p_{Rank} – ранг матрицы $M_T(n_r)$; p_{RE} – сумма элементов строк матрицы $M_T(n_r)$; p_{CE} – сумма элементов столбцов матрицы $M_T(n_r)$; p_{Ws} – вектор ранжированных и взвешенных сумм элементов строк и столбцов матрицы $M_T(n_r)$.

Значения параметров минимизации вычисляются с помощью выражений:

$$p_{RE}(n_r) = \sum_{i=1}^t 10^i s_R(n_r, i), \quad (5)$$

где $\{s_R(n_r, i)\}_{i=\overline{1,t}} = f_{sort} \left(\{v(n_r, i)\}_{i=\overline{1,t}} \right)$; $v(n_r, i) = \sum_{j=1}^t m_T(n_r, i, j)$; f_{sort} – функция сортировки, переупорядочивающая элементы вектора-аргумента в порядке убывания значений,

$$p_{CE}(n_r) = \sum_{j=1}^t 10^j s_C(n_r, j), \quad (6)$$

где $\{s_C(n_r, j)\}_{j=\overline{1,t}} = f_{sort} \left(\{v(n_r, j)\}_{j=\overline{1,t}} \right)$, $v(n_r, j) = \sum_{i=1}^t m_T(n_r, i, j)$,

$$p_{Ws}(n_r) = f_{sort} \left(\{p_w(n_r, k)\}_{k=\overline{1, ij}} \right), \quad (7)$$

$$p_w(n_r, k) = \left(10 \sum_{x=1}^t m_T(n_r, x, j) + \sum_{y=1}^t m_T(n_r, i, y) \right) m_T(n_r, i, j) \text{ при } k = \overline{1, (j-1) + (i-1) \cdot t}.$$

Ранговый метод формирования образов ошибок (общая структура генератора приведена на рис. 2) имеет высокую вычислительную сложность, обусловленную быстрым ростом числа $N(t)$ исходных образов от кратности ошибок t (см. табл. 1).

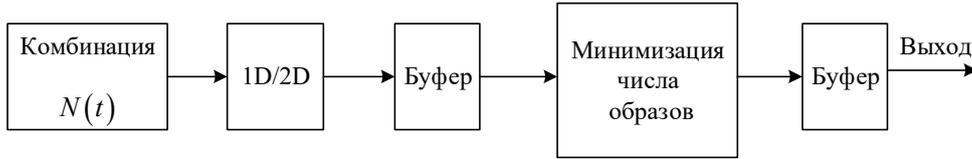


Рис. 2. Структурная схема генератора образов ошибок для ранговой и позиционной моделей
Fig. 2. Structural diagram of the error pattern generator for rank and positional models

Из выражений (4) – (7) следует, что вычислительная сложность может быть снижена за счет упрощения этих выражений и уменьшения числа $N_R(t)$ матриц $M_T(n_r)$. Данный подход использован в работе [12], где предложен позиционный алгоритм формирования образов ошибок (общая структура генератора соответствует рис. 2), основанный на следующей математической модели:

$$\{M_R(n)\}_{\overline{n=1, N(t)}} = f_M \left(\{M_o(n_o), p_{RE}(n_o), p_{CE}(n_o), p_{RZ}(n_o)\}_{\overline{n_o=1, N_o(t)}} \right), \quad (8)$$

$$M_o(n_o) = f_{MD} \left(\{M_T(n_r)\}_{\overline{n_r=1, N_R(t)}} \right) \text{ при } n_r = \overline{1, N_R(t)}, \quad N_o(t) = (t^2 - 1)! / (t^2 - t)! (t - 1)!, \quad (9)$$

где $M_o(n_o)$ – подмножество образов ошибок; f_{MD} – функция предварительной обработки, удаляющая матрицы, значение первого элемента которых равно нулю; $p_{RZ}(n_o)$ – параметр, показывающий сколько строк матрицы являются нулевыми. Значение $p_{RZ}(n_o)$ определяется с помощью выражения

$$p_{RZ}(n_o) = \sum_{i=1}^t r(n_o, i), \quad (10)$$

$$\text{где } r(n_o, i) = \begin{cases} 1, & \sum_{j=1}^t m_o(n_o, i, j) = 0, \\ 0, & \sum_{j=1}^t m_o(n_o, i, j) \neq 0. \end{cases}$$

Из выражений (3) – (4) следует, что число образов ошибок в позиционной модели уменьшается в $N(t)/N_o(t)$ раз по сравнению с ранговой моделью, что приводит к пропорциональному уменьшению вычислительной сложности (см. табл. 1). Дополнительное снижение вычислительной сложности в позиционной модели достигается за счет использования простого параметра (10) вместо относительно сложных (5) и (7). Несмотря на это, вычислительная сложность позиционной модели остается достаточно высокой, что делает актуальной задачу разработки более эффективной модели формирования образов ошибок.

Итерационное формирование образов ошибок

Для уменьшения вычислительной сложности формирования образов ошибок предлагается модель, основанная на итерационном расширении матриц базовых образов ошибок:

$$\{M_R(n, t)\}_{\overline{n=1, N(t)}} = \{M_x(n_x, t)\}_{\overline{n_x=1, N_X(t)}} \cup \{M_x(n_x, t)^T\}_{\overline{n_x(t)=1, N_X(t)}}, \quad (11)$$

$$\{M_x(n_x, t)\}_{\overline{n_x=1, N_X(t)}} = f_M \left(\{M_d(n_d, t), p_{Rank}(n_d, t), p_{RC}(n_d, t), p_{Ws}(n_d, t)\}_{\overline{n_d=1, N_d(t)}} \right),$$

$$\{M_d(n_d, t)\}_{\overline{n_d=1, N_d(t)}} = f_{add} \left(\{M_x(n_x, t-1)\}_{\overline{n_x=1, N_X(t-1)}} \right), \quad N_d(t) = N_X(t-1) \cdot (t^2 - t + 1),$$

$$M_x(n_x, 1) = m_x(n_x, 1) = 1 \text{ при } N_X(1) = 1,$$

$$\neg \exists n_1 \neg \exists n_2 \left(M_R(n_1) = (M_R(n_2))^T \right) \text{ при } n_1 = \overline{1, N(t)}, \quad n_2 = \overline{1, N(t)}, \quad (12)$$

где $M_x(n_x, t)$ – базовый образ ошибок на t -й итерации, $M_x(n_x, t) = \|m_x(n_x, t, i, j)\|_{(i=1, \bar{t}, j=1, \bar{t})}$; $M_d(n_d, t)$ – расширенный образ ошибок; f_{add} – функция расширения образа ошибок и добавления одного единичного элемента,

$$P_{RC} = f_{sort}(p_{RE}, p_{CE}). \quad (13)$$

На основе модели (11) – (13) предлагается следующий алгоритм расширения образов ошибок и добавления одного единичного элемента.

Вход: множество базового образа ошибок на $t - 1$ -й итерации $\{M_x^{(t-1)}\}$

Инициализация множества $\{M_d(n_d, t)\} \leftarrow \emptyset$

Цикл 1

Инициализация индекса: $i \leftarrow 0$

$M_{midr} \leftarrow$ добавим один столбец, в котором все элементы равны нулю, в самый правый из $\{M_x(i, t-1)\}$

$M_{mid} \leftarrow$ добавим одну строку, в которой все элементы равны нулю, в нижнюю часть M_{midr}

Цикл 2 по элементов e в подмножестве M_{mid} :

Если $M_{mid}(e) = 1$, $M_{mmid} \leftarrow M_{mid}$, $M_{mmid}(e) \leftarrow 1$

$\{M_d(n_d, t)\} \leftarrow [\{M_d(n_d, t)\}, M_{mmid}]$

Конец цикла 2.

$i \leftarrow i + 1$

Конец цикла 1.

Выход: множество расширенного образов ошибок на t -ой итерации $\{M_d^i\}$.

На рис. 3 приведена структура генератора, синтезированная на основе выражений (11) – (13), в которой формирование подмножества образов ошибок производится для каждого предыдущего образа t путем последовательного увеличения размера матрицы образа и кратности ошибок до $t+1$, исключения совпадающих матриц для $t+1$. В качестве базовой матрицы, не исключенной из рассмотрения, можно выбирать любую из подмножества, которая и будет последующим образом ошибок. Таким образом, выбранное подмножество образов будет базовым для формирования последующих образов ошибок кратности $t+1$.

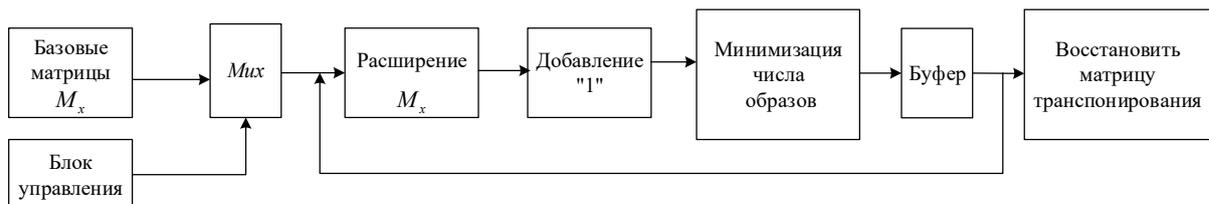


Рис. 3. Структурная схема генератора образов ошибок для итерационной модели
Fig. 3. Structural diagram of error pattern generator for the iterative model

На рис. 4 и 5 приведен порядок нахождения библиотек образов ошибок для $t=3$, $t=4$. При вычеркивании им подобных матриц можно руководствоваться различными критериями, например, чтобы «1» в образах ошибок были плотно упаковками («1» расположены рядом) или наоборот – «1» в образах были распределены равномерно.

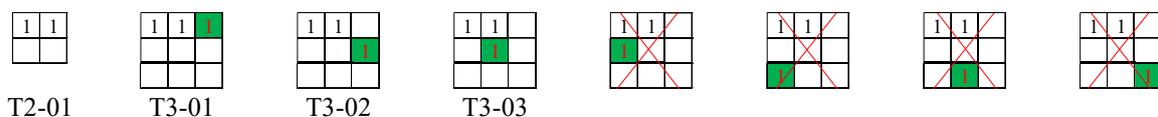


Рис. 4. Порядок формирования образов ошибок для $t=3$ из образов ошибок $t=2$
Fig. 4. The order of generating error patterns for $t=3$ that extended from that of $t=2$

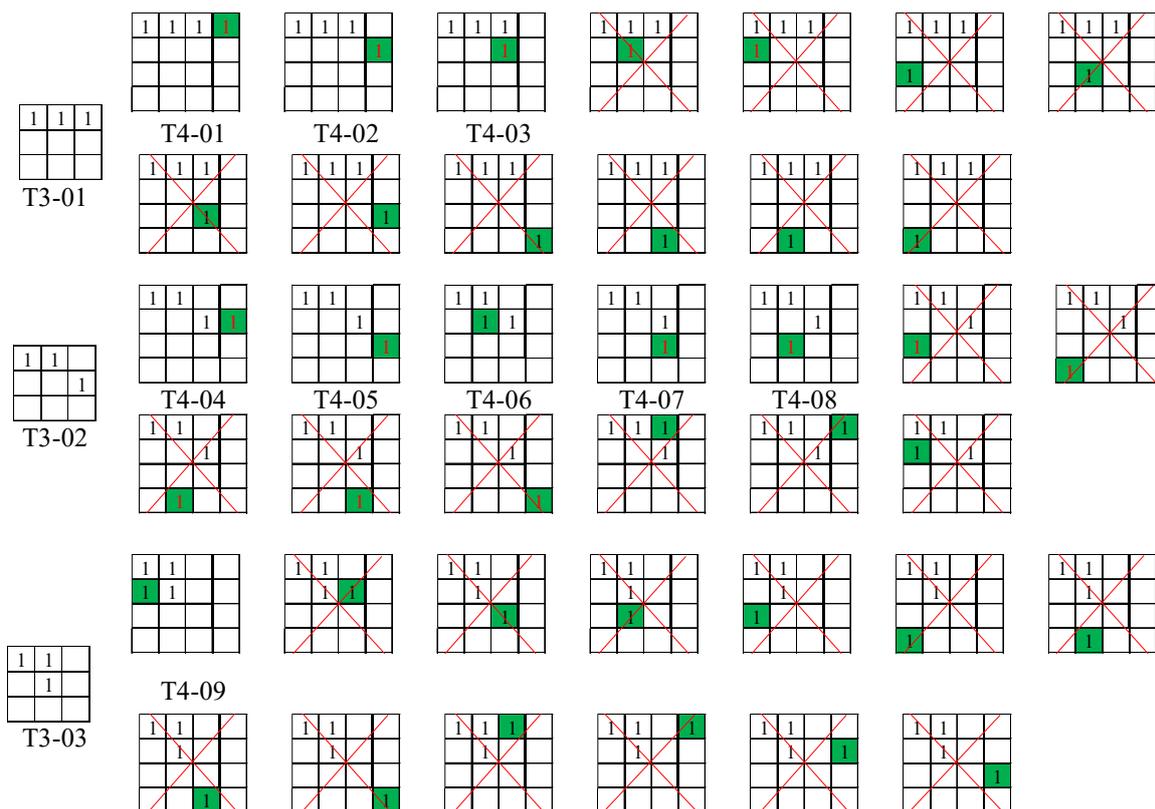


Рис. 5. Порядок формирования образов ошибок для $t=4$ из образов ошибок $t=3$
Fig. 5. The order of generating error patterns for $t=4$ that extended from that of $t=3$

Оценка эффективности формирования образов ошибок

В табл. 1 приведено количество N_d расширенных образов ошибок для различных t . Из табл. 1 следует, что при использовании итерационной модели количество анализируемых образов существенно уменьшается по сравнению с другими алгоритмами. Например, при $t=6$ библиотека состоит из 90 образов ошибок. При использовании ранговой модели необходимо формировать $C_{36}^6 = 1947792$ исходных матриц, а при использовании позиционной модели – 324632 исходных матриц. При этом итерационная модель требует только 620 расширенных образов ошибок. Из табл. 1 следует, что при $t=7$ пространственная сложность итерационного формирования библиотеки образов ошибок уменьшается в 39954 и 5708 раз по сравнению с ранговым и позиционным формированием. С ростом кратности ошибок выигрыш прогрессивно увеличивается. Программы формирования образов ошибок на основе различных моделей разработаны в среде Matlab.

В табл. 2 приведено время выполнения программ формирования образов ошибок для различных моделей. При проведении эксперимента использовалась четырехядерная платформа и операционная система Windows 10.

Таблица 2. Среднее время формирования библиотек образов ошибок
Table 2. Average time to generate error pattern libraries

Модели формирования образов ошибок	Кратность образов (размер матрицы) ошибок t							
	2	3	4	5	6	7	8	9
Ранговая	<1 с	<1 с	<1 с	7 с	10 мин	42 мин	>80 ч	–
Позиционная	<1 с	<1 с	<1 с	5 с	8 мин	36 мин	>80 ч	–
Итерационная	<1 с	<1 с	<1 с	<1 с	<1 с	2 с	8 с	30 мин

Анализ данных табл. 2 показывает, что время формирования библиотек для ошибок кратности $t \leq 5$ для первых двух моделей занимает менее нескольких секунд, а для $t = 6, 7$ – десятки минут, для $t \geq 8$ – часы. В то же время применение итерационной модели позволяет создать библиотеку образов для $t \leq 8$ за единицы и десятки секунд. Это объясняется тем, что, например, для $t = 8$ при использовании позиционной и ранговой моделей требуется проанализировать 138 317 668 и 4 426 165 368 перестановок образов в соответствии с [11], что, очевидно, требует больших вычислительных затрат. Из табл. 2 следует, что при $t = 7$ временная сложность итерационного формирования библиотеки образов ошибок уменьшается в 1260 и 1080 раз по сравнению с ранговым и позиционным формированием. С ростом кратности ошибок выигрыш прогрессивно увеличивается.

Заключение

Предложены модель, структура генератора и алгоритм формирования библиотеки образов ошибок на основе итерационного расширения матриц базовых образов ошибок для синдромно-норменного декодирования итеративных кодов. Предложенная модель отличается от известных ранговой и позиционной моделей итерационным формированием библиотеки образов ошибок в результате увеличения на каждой итерации размера предыдущей матрицы образа ошибок на единицу и исключения расширенных образов ошибок с одинаковыми идентификационными параметрами. Это позволяет сформировать библиотеку образов ошибок с различными нормами синдромов. Каждый из образов библиотеки представляет некоторое подмножество образов ошибок с одинаковыми нормами и является базовым для формирования всех остальных образов подмножества, которые могут быть получены на основе базового образа в результате перестановки его строк и столбцов. При итерационном расширении матриц базовых образов ошибок число формируемых избыточных образов сокращается на порядки, что и вносит основной вклад в уменьшение вычислительной сложности формирования библиотеки образов ошибок. Выигрыш прогрессивно увеличивается с ростом кратности ошибок.

Список литературы

1. Elias P. Error-free coding. *IEEE Trans Inf Theory*. 1954;4(4):29-37.
2. Shu L., Daniel J C., Jr. *Error Control Coding, Second Edition*. 2004:44-63.
3. Hamming R.W. Error Detecting and Error Correcting Codes. *Bell Syst. Tech. J.* 1950;29(1):47-60.
4. Fu B., Ampadu P. On hamming product codes with type-II hybrid ARQ for on-chip interconnects. *IEEE Trans Circuits Syst I, Reg Papers*. 2009;56(9):2042-2054.
5. Фам Хак Хоан., Смолякова О.Г., Конопелько В.К. Оптимизация параметров итеративных кодов при адаптивном трехэтапном декодировании. *Доклады БГУИР*. 2009;1(39):86-92.
6. Peterson W.W. Encoding and Error-Correction Procedures for the Bose-Chaudhuri Codes. *IRE Trans. Inform. Theory, IT-6*. 1960;4:59-70.
7. Chien R.T. Cyclic Decoding Procedure for the Bose-Chaudhuri-Hocquenghem Codes. *IEEE Trans. Inform. Theory, IT-10*. 1964;3:57-63.
8. Berlekamp E.R. *Algebraic Coding Theory*. McGraw-Hill, New York; 1968.
9. Липницкий В.А., Конопелько В.К. Теория норм синдромов и перестановочное декодирование помехоустойчивых кодов. *Доклады БГУИР*. 2000;1(39):146-157.
10. Конопелько В.К., Липницкий В.А., Спичекова Н.В. Классификация точечных образов и классическая проблема разбиения чисел. *Доклады БГУИР*. 2010;5(51):112-117.
11. Цветков В.Ю., Конопелько В.К., Липницкий В.А. *Предсказание, распознавание и формирование образов многокурсных изображений с подвижных объектов*. Минск; 2014:181-219.
12. Смолякова О.Г., Конопелько В.К. Классификация векторов ошибок при двумерном кодировании информации. *Доклады БГУИР*. 2008;7(37):19-28.

References

1. Elias P. Error-free coding. *IEEE Trans Inf Theory*. 1954;4(4):29-37.
2. Shu L., Daniel J C., Jr. *Error Control Coding, Second Edition*. 2004:44-63.

3. Hamming R.W. Error Detecting and Error Correcting Codes. *Bell Syst. Tech. J.* 1950;29(1):47-600.
4. Fu B., Ampadu P. On hamming product codes with type-II hybrid ARQ for on-chip interconnects. *IEEE Trans Circuits Syst I, Reg Papers.* 2009;56(9):2042-2054.
5. Pham khac Hoan., Smolyakova O. G., Konopelko V.K. [Optimizing parameters of iterated codes with adaptive three-phase decoding]. *Doklady BGUIR = Doklady BGUIR.* 2009;1(39):86-92. (In Russ.)
6. Peterson W.W. Encoding and Error-Correction Procedures for the Bose-Chaudhuri Codes. *IRE Trans. Inform. Theory, IT-6.* 1960;4:59-70.
7. Chien R.T. Cyclic Decoding Procedure for the Bose-Chaudhuri-Hocquenghem Codes. *IEEE Trans. Inform. Theory, IT-10.* 1964;3:57-63.
8. Berlekamp E.R. *Algebraic Coding Theory.* McGraw-Hill, New York; 1968.
9. Lipnitski V.A., Konopelko V.K. [The theory of syndrome norms in the permutation decoding action unjammable codes]. *Doklady BGUIR = Doklady BGUIR.* 2000;1(1):146-157. (In Russ.)
10. Konopelko V.K., Lipnitski A.V., Spichekova N.V. [Point pattern classification and classical number partition problem]. *Doklady BGUIR = Doklady BGUIR.* 2010;5(51):112-117. (In Russ.)
11. Tsvetkov V.Y., Konopelko V.K., Lipnitski A.V. [*Prediction, recognition, and pattern formation of multi-angle patterns from moving objects*]. Minsk, 2014;181-219. (In Russ.)
12. Smolyakova O.G., Konopelko V.K. [Classification vectors of errors at two-dimensional coding of the information]. *Doklady BGUIR = Doklady BGUIR.* 2008;7(37):19-28. (In Russ.)

Вклад авторов

Жэнь С.Х. разработала математическую модель, алгоритм, структуру и программную модель формирования образов ошибок, провела эксперименты.

Конопелько В.К. определил направление и цель исследования, общую структуру алгоритма, выполнил интерпретацию полученных результатов.

Цветков В.Ю. осуществил постановку задач исследования и научное редактирование статьи.

Authors' contribution

Ren X.X. developed a mathematical model, algorithm, structure and software model for the formation of error patterns, conducted experiments.

Kanapelka V.K. determined the direction and purpose of the study, the general structure of the algorithm, performed the interpretation of the results.

Tsviatkou V.Yu. carried out the formulation of research problems and scientific editing of the article.

Сведения об авторах

Жэнь С.Х., аспирант кафедры инфокоммуникационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Конопелько В.К., д.т.н., профессор кафедры инфокоммуникационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Цветков В.Ю., д.т.н., доцент, заведующий кафедрой инфокоммуникационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Information about the authors

Ren Xun Xuan, Ph.D. student at the Department of Infocommunication Technologies of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics.

Kanapelka V.K., Dr. of Sci., Professor at the Department of Infocommunication Technologies of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics.

Tsviatkou V.Yu., Dr. of Sci., Associate Professor, Head of the Department of Infocommunication Technologies of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics.

Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,
г. Минск, ул. П. Бровки, 6,
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники;
тел. +375-017-293-84-08;
e-mail: vtsvet@bsuir.by
Цветков Виктор Юрьевич

Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,
Minsk, P. Brovka st., 6,
Belarusian State University
of Informatics and Radioelectronics;
tel. +375-017-293-84-08;
e-mail: vtsvet@bsuir.by
Tsviatkou Viktor Yur'evich