УДК 519.677

ПРИМЕНЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКИХ СТЕПЕНЕЙ

В.М. ИЛЬИН

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 20 января 2014

Дано краткое изложение сущности нового метода решения алгебраических уравнений с максимальным числом разных вещественных корней, равным степени n уравнения – четвертой и выше.

Ключевые слова: решение алгебраических уравнений высоких степеней, использование арифметических прогрессий, снижение трудоемкости, высокая доступность.

Введение

В высшей алгебре существует теорема Руффини-Абеля, которая гласит, что для алгебраического уравнения, выше степени 4, нельзя указать общей формулы решения, подобной формуле Кардано, т.е. в радикалах [1]. Вопрос об условиях, при которых данное уравнение разрешимо в радикалах, был исследован Э. Галуа в XIX веке [1]. Но, как справедливо отмечено в [2], «уже в случае уравнений степени 4 формулы корней практически не применимы». И по отношению к уравнениям не только пятой, но и четвертой степени, используются численные методы решения [3].

В современных условиях для этого применяются ЭВМ, и специалисты высказывают мнение, что на численные решения затрачивается большая доля машинного времени. Так что поиск путей эффективного аналитического решения алгебраических уравнений не потерял актуальности. Данная статья посвящена разработке нового пути в этом деле, отличающегося большей эффективностью: более широким диапазоном использования, значительно меньшей трудоемкостью и высокой точностью. При решении алгебраических уравнений любой степени (больше первой) первоначально составляется квадратное уравнение с учетом того, что первый коэффициент приведенного решаемого алгебраического уравнения – это сумма С со знаком минус, а последний коэффициент этого уравнения есть произведение П его корней. Исходя только из этих двух коэффициентов определяются все корни решаемого уравнения. Наиболее простое объединение всех корней в этих двух коэффициентах уравнения является предпосылкой этого. От применения радикалов, исчерпавшего себя уравнениями четвертой степени, новый путь позволяет перейти к более гибкой системе арифметических прогрессий, к более совершенной процедуре вычисления корней.

Включение арифметических прогрессий в расчет алгебраических уравнений

Как уже отмечалось, первоначально составляем и решаем квадратное уравнение:

$$У^2 - СУ + П = 0. \tag{1}$$

Откуда $У_{1,2} = \dfrac{С}{2} \mp \sqrt{\left(\dfrac{С}{2}\right)^2 - П} = \dfrac{С}{2} \mp P$, где $P=\sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2-\Pi}=\sqrt{Д}$, Д – дискриминант, $У_1$ – меньший, а $У_2$ – больший корни выражения (1).

Проверка: $У_1+У_2 = \frac{C}{2}-p+\frac{C}{2}+p = C$,

$$У_1 \times У_2 = \left(\frac{C}{2}-p\right)\left(\frac{C}{2}+p\right)=\left(\frac{C}{2}\right)^2-p^2=\left(\frac{C}{2}\right)^2-\left(\frac{C}{2}\right)^2+\Pi=\Pi. \quad (2)$$

На основании соотношений (2) составляем базовую арифметическую прогрессию:

$У_1$	p	C_1	p	$У_2$	(3)

Здесь p – разность прогрессии. В дополнение к базовой прогрессии (3) составляются вспомогательные прогрессии. В общем виде это может быть представлено как:

	$У_1 = C_1–p$	p	C_1	p	$У_2= C_1+p$
–	$C_1–p–C_3 = C_2–p$	p	C_2	p	$C_1+p–C_3=C_2+p$
	C_3	0	C_3	0	C_3

В общем виде представлены: сверху базовая арифметическая прогрессия со средним членом $C_1=C_2+C_3=\frac{C}{2}=\text{const}$; сумма ее крайних членов: $C_1-p+C_1+p=C=\text{const}$. Из базовой прогрессии вычитается вспомогательная прогрессия, в ее центре C_2 – это часть C_1, зависящая от числа пар корней решаемого алгебраического уравнения, что будет показано на конкретных примерах. Крайние члены этой прогрессии $C_1–p–C_3 = C_2–p$ и $C_1+p–C_3 = C_2+p$ описывают с двух направлений – вертикального и горизонтального – искомые корни заданного алгебраического уравнения: x_1 и x_2, x_3 и x_4 и т.д. В конечном счете в этом участвуют все члены представленной совокупности прогрессий, их всего восемь: три горизонтальные и пять вертикальных, разности которых вычитаются из членов верхней базовой прогрессии. Дополнительная информация о сущности использования прогрессий содержится в примерах.

Примеры решения уравнений 4 степени

Пример 1. Дано алгебраическое уравнение: $x^4–10x^3+ 35x^2– 50x + 24 = 0$; $C = 10$; $\Pi = 24$. Требуется определить корни уравнения.

Решаем уравнение:

$$y^2 - 10y + 24 = 0. \quad (4)$$

Получим $y_{1,2} = 5\pm\sqrt{25-24}= 5\pm1$; $y_1 = 4$; $y_2 = 6$ – корни (4).

Составляем базовую арифметическую прогрессию.

4	1	5	1	6.	(5)

Поскольку заданное уравнение содержит четыре корня составляем вспомогательные прогрессии со средним значением 5:2 = 2,5:

1	1,5	2,5	1,5	4,

преобразуем базовую прогрессию (5) с разностью 1,5:

3,5	1,5	5	1,5	6,5.

Дописываем к ней предыдущую прогрессию и вычитаем ее из базовой:

	3,5	1,5	5	1,5	6,5
–	1	1,5	2,5	1,5	4
	2,5	0	2,5	0	2,5.

Здесь все три горизонтали – прогрессии (третья имеет равную 0 разность), все столбцы – прогрессии с отрицательными разностями во второй строке. Эта совокупность прогрессий полностью законченная, содержит два корня (1 и 4) уравнения 4-ой степени.

Чтобы определять два других его корня, составляем прогрессию со средним значением 2,5 и разностью 0,5, а над ней скорректированную базовую прогрессию с такой же разностью:

	4,5	0,5	5	0,5	5,5
–	2	0,5	2,5	0,5	3
	2,5	0	2,5	0	2,5.

Таким образом, к первым двум корням исходного уравнения добавилось еще два его корня: 2 и 3. Следовательно, имеем четыре корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Проверка: С = 10; П = 24, кроме того можно проверить решение подстановкой корней в исходное алгебраическое уравнение. Полученные решения можно проверять также через квадратные уравнения с корнями 1 и 4, 2 и 3:

$x_2 – 5x + 4 = 0$; $x_{1,4} = 2,5 \pm\sqrt{6,25-4} = 2,5 \pm\sqrt{2,5} = 2,5 \mp 1,5 = 1$ и 4;

$x_2 – 5x + 6 = 0$; $x_{2,3} = 2,5 \pm\sqrt{6,25-6} = 2,5 \pm\sqrt{0,25} = 2,5 \mp 0,5 = 2$ и 3.

Пример 2. Дано алгебраическое уравнение: $x^4 – 10x^3 + 32x^2 – 37,5x + 11,8125 = 0$. Требуется определить корни этого уравнения.

Решаем уравнение

$y^2 – 10y + 11,8125 = 0.$

Получим $y_{1,2} = 5 \pm\sqrt{25-11,18125} = 5 \pm\sqrt{13,1875} = 5 \pm 3,6315$.

Корни приведенного выше уравнения: 1,3685 – меньший, 8,6315 – больший.

Составляем базовую прогрессию:

1,3685 3,6315 5 3,6315 8,6315.

Упрощаем базовую прогрессию, не изменяя ее контрольного члена 5 и суммы крайних членов, отняв от правого крайнего члена 1,6315 и добавив это к крайнему левому члену. Дописываем к ней и вычитаем

	3	2	5	2	7
–	0,5	2	2,5	2	4,5
	2,5	0	25	0	2,5.

Получаем завершенный комплект продольных и вертикальных прогрессий; в нем 0,5 и 4,5 – это два корня исходного уравнения.

Для получения величин второй пары корней базовую и вторую прогрессии преобразуем к новой разности прогрессий, равной 1:

	4	1	5	1	6
–	1,5	1	2,5	1	3,5
	2,5	0	25	0	2,5.

Завершенность прогрессий говорит о том, что в них содержатся два корня (1,5 и 3,5) исходного алгебраического уравнения. Таким образом, корни решаемого уравнения имеют величины: $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 4{,}5$; $x_3 = 1{,}5$; $x_4 = 3{,}5$. Порядок их определения такой же, как и в первом примере. Он полностью согласуется с намеченным в общем виде порядком использования обобщенных прогрессий.

Проверка такая же как и в первом примере, в частности: С = 0,5 + 4,5 + 1,5 + 3,5 = 10; П = 0,5×4,5×1,5×3,5 = 11,8125.

Пример 3. Дано алгебраическое уравнение: $x^4–9{,}3x^3+30{,}3x^2–39{,}8x+16{,}8 = 0$. Требуется определить его корни.

Решаем уравнение

$y^2–9{,}3y+16{,}8 = 0$, получаем:

$y_{1,2}= 4{,}65\pm\sqrt{4{,}65^2-16{,}8} = 4{,}65\pm\sqrt{21{,}6225-16{,}8} = 4{,}65\pm\sqrt{4{,}8225} =4{,}65\pm2{,}196.$

Корни – 2,454 и 6,846. Этому соответствует арифметическая прогрессия базовая:

2,454	2,196	4,65	2,196	6,846

или, как было отмечено выше, она может быть преобразована без изменения средней величины (4,65) и суммы корней 2,454+6,846=9,3 в следующую базовую прогрессию с добавлением частной прогрессии:

	3,3	1,35	4,65		1,35	6
–						
	0,8	1,35	2,15		1,35	3,5
	2,5	0	2,5		0	2,5.

Корни 0,8 и 3,5, их сумма 4,3, а среднее 2,15. Поэтому на два других корня остается 4,65–2,15 = 2,5 общего среднего суммы всех корней. Следовательно, для их определения имеем прогрессии:

	4,15	0,5	4,65	0,5	5,15
–					
	2	0,5	2,5	0,5	3
	2,15	0	2,15	0	2,15.

Здесь корни – это 2 и 3, всего же в заданном алгебраическом уравнении четвертой степени четыре корня: $x_1 = 0{,}8$; $x_2 = 3{,}5$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$. Их сумма – 9,3, произведение – 16,8.

Для получения пары корней составлен баланс восьми прогрессий: трех горизонтальных, одна из них базовая и две частные, и пять коротких одношаговых вертикальных прогрессий с отрицательными разностями: –2, –0,5; –2,5; –0,5; –3 (все они отнимаются от соответствующих членов базовой прогрессии) – баланс всех восьми прогрессий подтверждает величины корней.

Кроме того, они могут быть легко проверены подстановкой в решаемое уравнение, а также решением квадратных уравнений из пар корней (как в примере 2):

$x_{12} = \frac{4{,}3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{4{,}3}{2}\right)^2-2{,}8} = 2{,}15\pm\sqrt{1{,}8225} = 2{,}15\pm1{,}35 = 3{,}5$ и 0,8,

$x_{34} = \frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-6} = 2{,}5\pm\sqrt{6{,}25-6} = 2{,}5\pm\sqrt{0{,}25} = 2{,}5\pm0{,}5 = 3$ и 2.

Пример 4. Дано алгебраическое уравнение: $x^6–15x^5+87{,}25x^4–247{,}5x^3+352{,}75x^2–232{,}5x+54 = 0$.

Требуется определить корни заданного уравнения.

Решаем укороченное уравнение:

$y^2 – 15y + 54 = 0$,

$y_{12} = 7{,}5 \mp \sqrt{56{,}25 - 54} = 7{,}5 \mp \sqrt{2{,}25} = 7{,}5 \mp 1{,}5$; корни – 6 и 9.

Составляем базовую прогрессию:

6 1,5 7,5 1,5 9.

Среднее от 15 равно 7,5, т.е. на каждую пару из 6 корней приходится 7,5:3 = 2,5, или 1,3 общей средней величины, входящей в частную арифметическую прогрессию. Таким образом, от первой базовой прогрессии надо отнять частную прогрессию

	6	1,5	7,5	1,5	9
–					
	1	1,5	2,5	1,5	4
	5	0	5	0	5.

В этой завершенной сбалансированности всех продольных и поперечных прогрессий (их всех 8) крайние величины второй прогрессии (1 и 4) являются корнями уравнения.

Если же от измененной базовой прогрессии с большей разностью (на 0,5) отнять частную прогрессию,

	5,5	2	7,5	2	9,5
–					
	0,5	2	2,5	2	4,5
	5	0	5	0	5,

то в этой сбалансированной прогрессии получим корни 0,5 и 4,5.

Далее, если от изменений базовой прогрессии с разностью 0,5 отнять частную прогрессию с такой же разностью, т.е.

	7	0,5	7,5	0,5	8
–					
	2	0,5	2,5	0,5	3
	5	0	5	0	5.

Получим третью пару корней: 2 и 3. Следовательно, процедура определения корней алгебраического уравнения степени 6 та же, что и для степени 4.

Корни – это разности между верхними величинами столбцов 1и 5 и их нижними величинами, с учетом того, что вторая прогрессия вычитается из первой (верхней), знаки ее членов положительные.

Следовательно заданному алгебраическому уравнению шестой степени соответствуют корни: $x_1 = 1$; $x_2 = 4$; $x_3 = 0{,}5$; $x_4 = 4{,}5$; $x_5 = 2$; $x_6 = 3$.

Проверку правильности решения уравнения можно осуществить одним из способов:

– через определение суммы и произведения корней;

– через подстановку их в исходное уравнение;

– через решение квадратных уравнений, соответствующих парам корней. В частности:

$$x_{12} = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 4} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4} = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}25} = 2{,}5 \pm 1{,}5 = 4 \text{ и } 1;$$

$$x_{34} = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 2{,}25} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 2{,}25} = 2{,}5 \pm \sqrt{4} = 2{,}5 \pm 2 = 4{,}5 \text{ и } 0{,}5;$$

$$x_{56} = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 6} = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 6} = 2{,}5 \pm \sqrt{0{,}25} = 2{,}5 \pm 0{,}5 = 3 \text{ и } 2.$$

Здесь четко видно, что пары корней формируются и определяются как пары, в которые входят меньшие и большие величины, что предопределяется меньшим началом базовой арифметической прогрессии по сравнению с ее концом и постоянным средним членом, равным $C/2 = C_1$. Это соотношение сохраняется при всех преобразованиях базовой прогрессии. Следует также отметить, что возможность преобразования базовой прогрессии:

1) упрощает ее, освобождая в расчете от образующихся дробей;

2) позволяет в необходимых пределах регулировать величину разности прогрессий p и

тем самым добиваться баланса всей совокупности продольных и поперечных прогрессий и получать четкий, точный результат по определению корней.

Следует также подчеркнуть, что кроме решения начальных квадратных уравнений, все остальные расчетные действия являются линейными, т.е. практически немыслимыми в методе, использующем радикалы даже невысоких, 3 и 4, степеней. Отсюда значительное снижение затрат времени и труда на решение многих задач. Ключ открывший новый путь решения алгебраических уравнений – восемь небольших арифметических прогрессий в гармоничном регулируемом сочетании. При этом регулирование арифметических прогрессий, приводящее к выявлению корней алгебраических уравнений, выполняется изменением одинаковых разностей базовой и частных прогрессий вокруг разности, которая возникает в решении первоначального квадратного уравнения (см. примеры: 1–4).

Заключение

По-новому определены корни алгебраических уравнений четвертой и шестой степеней. Основа метода-применение арифметических прогрессий, позволяющие выявлять корни алгебраических уравнений с высокой точностью и с небольшими затратами труда и времени. Намечены пути расширения возможностей этого метода.

ARITHMETIC PROGRESSION APPLICATION FOR SOLVING OF HIGH DEGREES ALGEBRAIC EQUATIONS

V.M. ILYIN

Abstract

A new method for solving of algebraic equations with the maximum number of different real roots equal degree *n* (fourth and above) is given.

Список литературы

1. *Мишина А.П., Проскуряков И.В.* Высшая алгебра. Л., 1962.
2. Малая математическая энциклопедия. Будапешт, 1976.
3. *Андре Анго*. Математика для электро-и радиоинженеров. М., 1964.