



<http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2021-19-14-21>

Оригинальная статья  
Original paper

УДК 539.3

## УСКОРЕНИЕ ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ РАСЧЕТОВ ДЛЯ ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ ФОРМЫ И ТЕХНОЛОГИИ CUDA

С.С. ЩЕРБАКОВ<sup>1,2</sup>, М.М. ПОЛЕЩУК<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Государственный комитет по науке и технологиям Республики Беларусь  
(г. Минск, Республика Беларусь)

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет (г. Минск, Республика Беларусь)

Поступила в редакцию 9 сентября 2020

© Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 2021

**Аннотация.** Развитие компьютерных технологий, как в аппаратной, так и программной сфере, позволяет быстро и точно получать решения прикладных задач многих областей науки. Ускорение расчетов – широко применяемая техника, которая реализуется на основе многоядерности и многопоточности процессоров. Технология NVidia CUDA, или просто CUDA, позволяет наиболее эффективно ускорять метод граничных элементов, который реализуется путем множества независимых расчетов. Основная цель работы заключается в реализации и ускорении непрямого метода граничных элементов с использованием трех функций формы для вычисления распределения потенциала внутри замкнутого контура при действии потенциала, распределенного на поверхности. Ускорение соответствующих вычислений было реализовано на графическом акселераторе с помощью технологии NVidia CUDA. Получены зависимости ускорения параллельных вычислений по сравнению с последовательными в зависимости от количества граничных элементов и расчетных узлов. Показано значительное, до 52 раз, ускорение расчета распределения потенциала при сохранении его точности. Достигнуто ускорение до 22 раз при расчете матрицы взаимовлияний граничных элементов. Также исследована сходимости данного метода. При использовании технологии CUDA можно получить значительное ускорение без потери точности и скорости сходимости. Таким образом, использование CUDA является очень хорошим подходом к распараллеливанию гранично-элементного метода. Применение этой технологии для ускорения вычислений позволит эффективно решать задачи различных областей физики: акустики, гидромеханики, электродинамики, механики твердых тел и многих других.

**Ключевые слова:** метод граничных элементов, распараллеливание, распределение потенциала, NVidia CUDA, ускорение.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования.** Щербаков С.С., Полещук М.М. Ускорение гранично-элементных расчетов для замкнутой области с использованием нелинейных функций формы и технологии CUDA. Доклады БГУИР. 2021; 19(3): 14-21.

## ACCELERATION OF BOUNDARY ELEMENT CALCULATIONS FOR CLOSED DOMAIN USING NONLINEAR FORM FUNCTIONS AND CUDA TECHNOLOGY

SERGEY S. SHERBAKOV<sup>1,2</sup>, MIKHAIL M. POLESTCHUK<sup>2</sup>

<sup>1</sup> State Committee on Science and Technology of the Republic of Belarus, (Minsk, Republic of Belarus)

<sup>2</sup> Belarusian State University (Minsk, Republic of Belarus)

Submitted 9 September 2020

© Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2021

**Abstract.** The evolution of computer technologies, as a hardware and a software parts, allows to attain fast and accurate solutions to many applied problems in scientific areas. Acceleration of calculations is broadly used technic that is basically implemented by multithreading and multicore processors. NVidia CUDA technology or simply CUDA opens a way to efficient acceleration of boundary elements method (BEM), that includes many independent stages. The main goal of the paper is implementation and acceleration of indirect boundary element method using three form functions. Calculation of the potential distribution inside a closed boundary under the action of the defined boundary condition is considered. In order to accelerate corresponding calculations, they were parallelized at the graphic accelerator using NVidia CUDA technology. The dependences of acceleration of parallel computations as compared with sequential ones were explored for different numbers of boundary elements and computational nodes. A significant acceleration (up to 52 times) calculation of the potential distribution without loss in accuracy is shown. Acceleration of up to 22 times was achieved in calculation of mutual influence matrix for boundary elements. Using CUDA technology allows to attain significant acceleration without loss in accuracy and convergence. So application of CUDA is a good way to parallelizing BEM. Application of developed approach allows to solve problems in different areas of physics such as acoustics, hydromechanics, electrodynamics, mechanics of solids and many other areas, efficiently.

**Keywords:** boundary element method, parallelization, distribution of potential, NVidia CUDA, acceleration.

**Conflict of interests.** The authors declare no conflict of interests.

**For citation.** Sherbakov S.S., Polestchuk M.M. Acceleration of boundary element calculations for closed domain using nonlinear form functions and CUDA technology. Doklady BGUIR. 2021; 19(3): 14-21.

### Введение

Необходимость ускорения расчетов является одной из приоритетных задач современных численных методов. При решении задач механики сплошной среды и механики деформируемого твердого тела широко используется метод граничных элементов (МГЭ). Основным недостатком классической реализации данного метода является большое время вычислений по сравнению, например, с методом конечных элементов. Использование технологии NVidia CUDA позволяет многократно ускорить расчеты, как показано, например, в работе [1], где в качестве исследуемой области была рассмотрена полуплоскость. В настоящей статье в качестве объекта исследования рассмотрена двумерная прямоугольная область.

**Постановка задачи.** Рассмотрим решение задачи об определении распределения потенциала внутри замкнутой прямоугольной области  $A = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 5, -8 \leq y \leq 0\}$  при действии потенциала, распределенного на отрезке  $-b \leq x \leq b, y = 0, b = 2,5$  верхней границы данной области (рис. 1):

$$p^*(x) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}. \quad (1)$$

Решение задачи было получено непрямым МГЭ [2] с распараллеливанием вычислений матрицы взаимовлияний и распределения потенциала с помощью технологии NVidia CUDA.

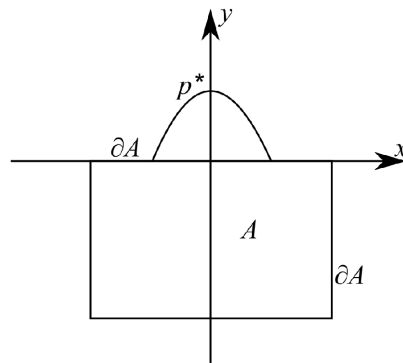


Рис. 1. Схема задачи и граничное условие  
Fig. 1. Problem scheme and boundary condition

### Решение с применением нелинейных функций формы

Подобная задача была рассмотрена в [1] за исключением формы границы, тут же она замкнута и имеет прямоугольную форму. Особенностью данной задачи является программная реализация расположения функций формы около углов прямоугольника. При расчетах использовались три функции формы  $f_i^I(\mathbf{x})$ ,  $f_i^{II}(\mathbf{x})$ ,  $f_i^{III}(\mathbf{x})$ , которые распределялись на граничных элементах, как показано на рис. 2. Обязательным условием для обеспечения гладкости искомого решения на поверхности является равенство  $f_i^{III} = f_{i+1}^I$ .

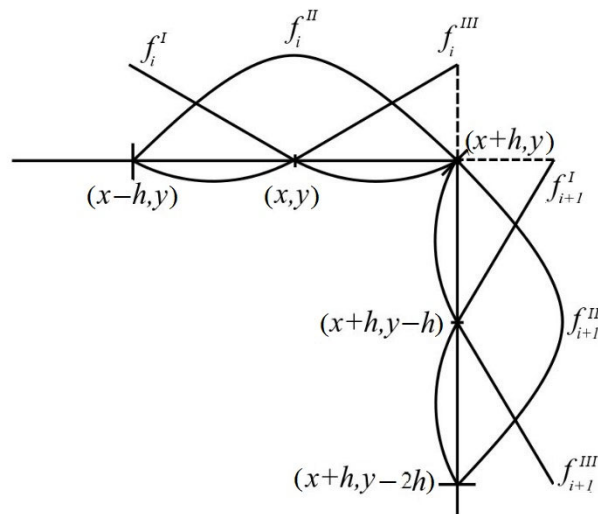


Рис. 2. Распределение нелинейных функций формы по граничным элементам  
Fig. 2. Nonlinear form functions distribution on boundary elements

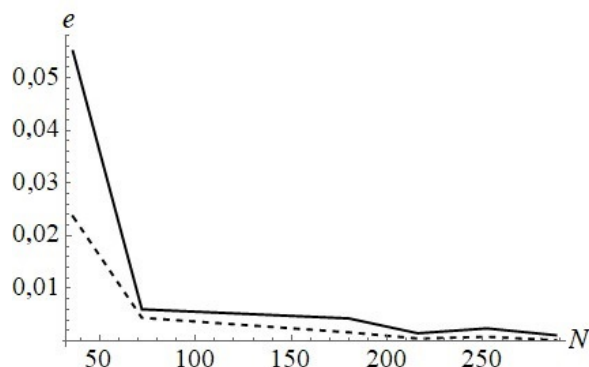
### Сходимость расчета

Сходимость расчетов с использованием нелинейных функций формы оценивалась для распределения потенциала вдоль оси  $y$ . В качестве эталонного распределения рассматривался результат расчета с использованием нелинейных функций формы для максимального числа граничных элементов  $N = 288$ .

На рис. 3. представлены две зависимости погрешности  $e$  решений  $p$  с равномерной (линейной) функцией формы и тремя нелинейными относительно эталонного  $p^{eth}$  от числа граничных элементов ( $\Gamma\mathcal{E}$ ), которые были получены по формуле

$$e_k = \sum_y \frac{P_k - P_{k-1}}{p^{eth}}, \quad (2)$$

где  $k$  – это номер дискретизации.



**Рис. 3.** Графики сходимости алгоритмов с равномерной (сплошная) и нелинейными (пунктирная) функциями влияния

**Fig. 3.** Convergence plot of algorithms with level (continuous) and nonlinear (dashed) form functions

Как видно из рис. 3, при дискретизации более 70 ГЭ данная погрешность составляет менее 1% и продолжает уменьшаться при уменьшении размера ГЭ, что свидетельствует о хорошей сходимости алгоритма.

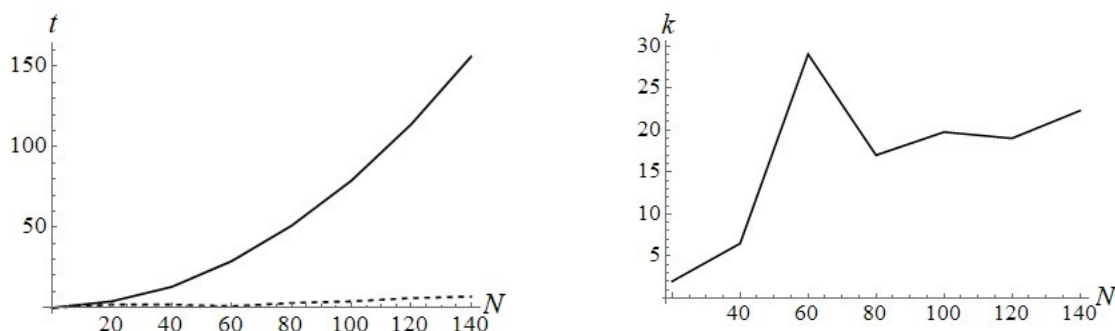
Из анализа погрешности относительно эталона для каждой дискретизации также видно, что скорость сходимости алгоритма МГЭ с тремя нелинейными функциями формы примерно в 3,2 раза выше, чем у алгоритма с равномерной функцией формы.

### Применение технологии CUDA для ускорения формирования матрицы взаимовлияния

Про формирование матрицы взаимовлияния и процесс построения итогового решения также было рассказано в [1]. Так как в статье [1] было показано, что скорость последовательной реализации алгоритма, реализованного в пакете Wolfram Mathematica, крайне низкая по отношению к алгоритму, реализованному на C, в дальнейшем будет рассматриваться реализация только на C.

Для распараллеливания расчетов были выбраны наборы различных дискретизаций для границы, а также внутренней части расчетной области. В целях чистоты и повторяемости эксперимента расчеты проводились на одной и той же графической карте, в то время как последовательный расчет производился на центральном процессоре. Подробное описание оборудования, использованного для расчетов, можно найти в [1].

На рис. 4 представлена зависимость времени формирования матрицы взаимовлияний и коэффициента ускорения расчетов от количества ГЭ для последовательной (C) и распараллеленной реализации алгоритма (CUDA).



**Рис. 4.** Время формирования матрицы взаимовлияния и коэффициент ускорения

**Fig. 4.** Creation time of influence matrix and of acceleration coefficients

### Распараллеливание расчета распределения потенциала под поверхностью

Также эффективно можно распараллеливать и процесс вычисления распределения потенциала. Далее будут представлены распределения потенциала (рис. 5), время расчетов (рис. 6) и коэффициенты ускорений (рис. 7), полученные при использовании технологии CUDA для различных дискретизаций.

Распределения полей потенциала были построены для разных дискретизаций расчетной области.

При вычислении распределения потенциала используется подход к вычислениям, который подробно описан в [1]. Вычисление распределения потенциала состоит из независимых операций для каждого расчетного узла. Таким образом, вычисляя потенциал для каждого расчетного узла в отдельном потоке, можно получить значительный прирост скорости вычисления распределения потенциала.

Рассмотрим зависимости времени расчета потенциала при фиксированном количестве граничных элементов и расчетных узлов. Из анализа рис. 6 можно сделать вывод, что время, требуемое для последовательного расчета, почти линейно зависит от дискретизации границы и расчетной области. При этом также растет, хотя и гораздо медленнее, время параллельных вычислений. Это связано с временными затратами на копирование расчетных данных из оперативной памяти в память графического процессора. В итоге ускорение вычислений достигает 52 раз.

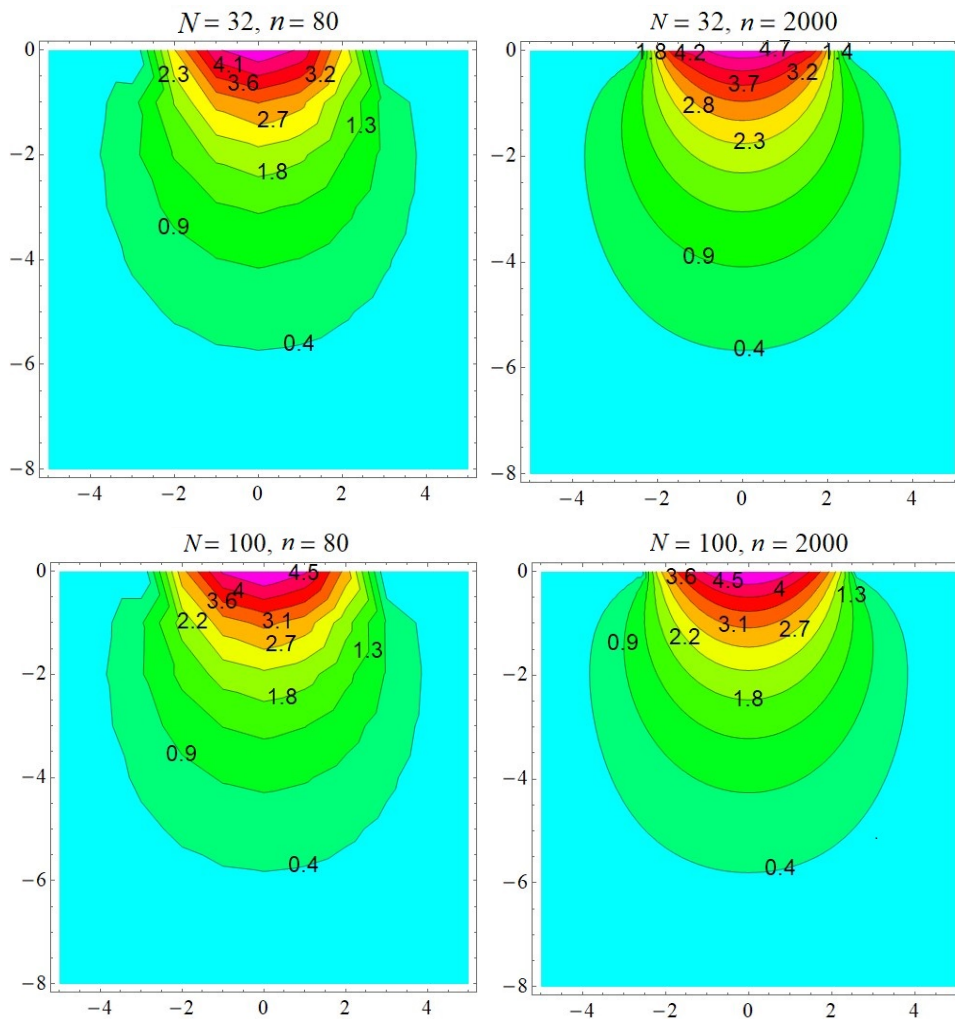


Рис. 5. Распределение потенциала для разного количества граничных элементов и расчетных узлов  
Fig. 5. Potential distribution for different number of boundary elements and calculation nodes

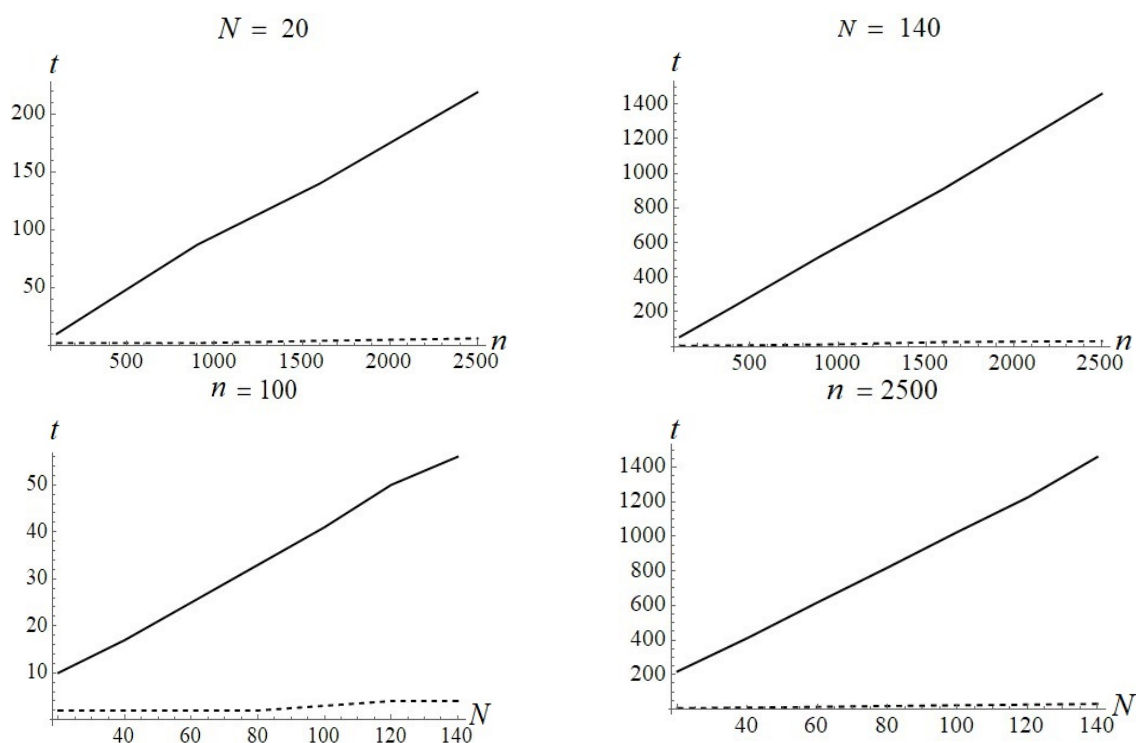


Рис. 6. Зависимости времени расчета распределения потенциала от количества граничных элементов и расчетных узлов

Fig. 6. Calculation time dependence on number of boundary elements and calculations nodes

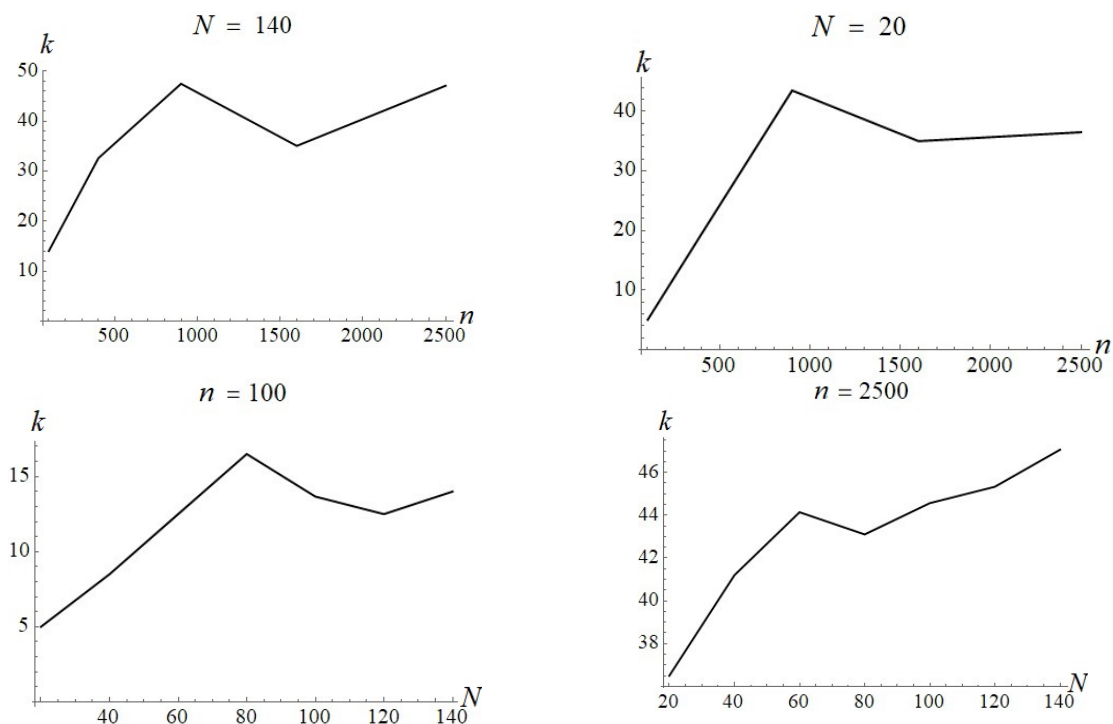
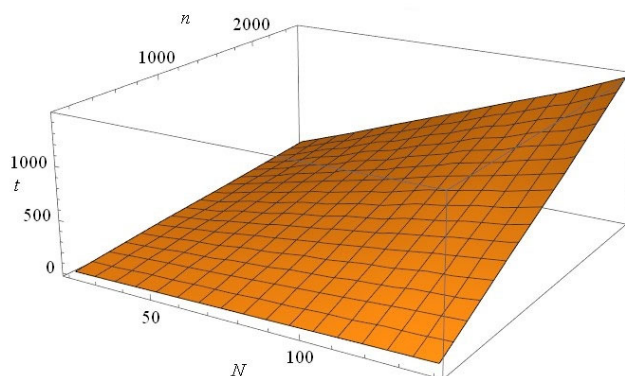


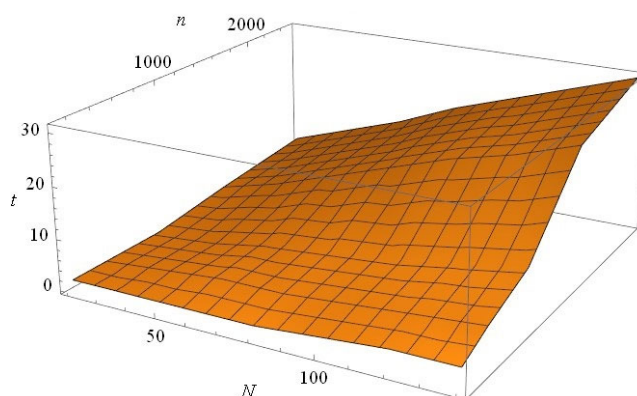
Рис. 7. Зависимости коэффициентов ускорения от количества различных элементов и расчетных узлов

Fig. 7. Acceleration coefficients dependence on number of boundary elements and calculation nodes

На рис. 8, 9 показаны зависимости времени расчета сразу от двух параметров: количества граничных элементов и количества расчетных узлов для последовательного и параллельного расчетов соответственно.



**Рис. 8.** Зависимость времени вычисления потенциала от количества граничных элементов и расчетных узлов для последовательного расчета  
**Fig. 8.** Potential calculation time dependence on number of boundary elements and calculations nodes by consequent calculation



**Рис. 9.** Зависимость времени вычисления потенциала от количества граничных элементов и расчетных узлов при распараллеливании расчета (CUDA)  
**Fig. 9.** Potential calculation time dependence on number of boundary elements and calculation nodes by parallelization of calculation (CUDA)

### Заключение

Был реализован метод граничных элементов с тремя нелинейными функциями формы для отыскания распределения потенциала внутри прямоугольной замкнутой области. Применение технологии CUDA позволило эффективно распараллелить расчеты и получить значительные приросты к скорости вычислений.

Исследование сходимости расчета с использованием нелинейных функций формы показало существенную разницу аналогичного метода с постоянными функциями. Таким образом, скорость сходимости метода с нелинейными функциями формы, выбранными в данной работе, выше в 3,2 раза. Также исследована погрешность данных методов относительно друг друга, и представлена ее зависимость от числа граничных элементов.

Для каждой комбинации числа граничных элементов и количества расчетных узлов были построены графики времени расчета и коэффициента ускорения. При изучении данных зависимостей был сделан вывод о значительном, до 52 раз, ускорении расчета распределения потенциала при сохранении его точности, и, что немаловажно, ускорении до 22 раз при формировании матрицы взаимовлияний граничных элементов.

Данные результаты могут быть использованы для развития технологии CUDA в сфере компьютерного моделирования, чтобы в дальнейшем получить более эффективные методы моделирования различных задач.

### Список литературы

1. Щербаков С.С., Полещук М.М. Ускорение гранично-элементных расчетов с помощью графического акселератора для элементов с нелинейными функциями формы. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2019;4(49);89-94.
2. Бенерджи П. *Метод граничных элементов в прикладных науках*. Москва: Мир; 1984.
3. Крауч С.Л. *Методы граничных элементов в механике твердого тела*. Москва: Мир; 1987.
4. Molina-Moya J., Mart'inez-Castro A.E., Ortiz P. An Iterative Parallel Solver in GPU Applied to Frequency Domain Linear Water Wave Problems by the Boundary Element Method. *Frontiers in Built Environment*. 26 November 2018. DOI: 10.3389/fbuil.2018.00069.
5. Takahashi T., Hamada T. GPU-accelerated boundary element method for Helmholtz' equation in three dimensions. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*. 2009;80:1295-1321. DOI: 10.1002/nme.2661.
6. Rauber T., Runger G. *General Purpose GPU Programming*. In: *Parallel Programming*. Berlin: Springer, Heidelberg; 2013: 387-415. DOI: 10.1007/978-3-642-37801-0\_7.

### References

1. Sherbakov S.S., Polestchuk M.M. [Acceleration of boundary-element computing using graphics accelerator for the elements with nonlinear form functions]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*. 2019;4(49);89-94. (In Russ.)
2. Benerdgi P. [*Boundary element method in applied sciences*]. Moscow: Mir; 1984. (In Russ.)
3. Crouch S.L. [*Boundary elements methods in solid mechanics*]. Moscow: Mir; 1987. (In Russ.)
4. Molina-Moya J., Mart'inez-Castro A.E., Ortiz P. An Iterative Parallel Solver in GPU Applied to Frequency Domain Linear Water Wave Problems by the Boundary Element Method. *Frontiers in Built Environment*. 26 November 2018. DOI: 10.3389/fbuil.2018.00069.
5. Takahashi T., Hamada T. GPU-accelerated boundary element method for Helmholtz' equation in three dimensions. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*. 2009;80:1295-1321. DOI: 10.1002/nme.2661.
6. Rauber T., Runger G. *General Purpose GPU Programming*. In: *Parallel Programming*. Berlin: Springer, Heidelberg; 2013: 387-415. DOI: 10.1007/978-3-642-37801-0\_7.

### Вклад авторов

Щербаков С.С. определил задачи, которые необходимо было решить в ходе проведения исследований, принимал участие в реализации алгоритмов и интерпретации результатов.

Полещук М.М. принимал участие в реализации алгоритмов и интерпретации результатов.

### Authors' contribution

Sherbakov S.S. identified the tasks that needed to be solved during the research, and also took part in the realization of algorithms and interpretation of their results.

Polestchuk M.M. took part in the realization of algorithms and interpretation of their results.

### Сведения об авторах

Щербаков С.С., д.ф.-м.н, профессор, заместитель Председателя Государственного комитета по науке и технологиям Республики Беларусь, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета.

Полещук М.М., аспирант кафедры теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета.

### Information about the authors

Sherbakov S.S., D.Sc., Professor, Vice Chairman of the State Committee on Science and Technology of the Republic of Belarus, Professor at the Department of Theoretical and Applied Mechanics of Belarusian State University.

Polestchuk M.M., Postgraduate student at the Department of Theoretical and Applied Mechanics of Belarusian State University.

### Адрес для корреспонденции

220125, Республика Беларусь,  
г. Минск, ул. Николая Михайлашева, 5, кв. 96;  
тел. +375-29-809-05-09;  
e-mail: mikhailpaliashchuk@yandex.ru  
Полещук Михаил Михайлович

### Address for correspondence

220125, Republic of Belarus,  
Minsk, Nikolaya Mikhailasheva str., 5, r. 96;  
tel. +375-29-809-05-09;  
e-mail: mikhailpaliashchuk@yandex.ru  
Polestchuk Mikhail Mikhailovich