



<http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2021-19-1-21-29>

Оригинальная статья  
Original paper

УДК 539.3

## МЕТОД МОНТЕ – КАРЛО ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И АНАЛИЗА ПОВРЕЖДАЕМОСТИ СИЛОВОЙ СИСТЕМЫ

Д.Е. МАРМЫШ<sup>1,2</sup>, В.И. БОБОЕД<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет (г. Минск, Республика Беларусь)

<sup>2</sup>Даляньский политехнический университет (г. Далянь, Китайская Народная Республика)

Поступила в редакцию 5 февраля 2020

© Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 2021

**Аннотация.** Цель работы, результаты которой представлены в статье, заключалась в разработке алгоритмов вычисления повреждаемости твердого тела или системы твердых тел, основанных на методе Монте – Карло и методе аналитического граничного элемента. Метод аналитического граничного элемента был использован для расчета и анализа напряженно-деформированного состояния твердого тела от распределенной поверхностной нагрузки. Основываясь на показателях напряженного состояния, разработаны алгоритмы численной оценки опасного объема и интегральной повреждаемости с применением методов Монте – Карло. Исходя из картины распределения полей напряжений, описана методика определения области для генерации случайным образом узлов интегрирования. Разработаны общие рекомендации по определению границ подобласти, содержащей опасный объем. Исходя из особенностей методов Монте – Карло, проведена численная оценка показателей повреждаемости среды для разного количества узлов интегрирования. Методы и алгоритмы были применены для вычисления опасного объема и интегральной повреждаемости в плоском и пространственном случаях для двух наиболее распространенных законов распределения поверхностных усилий в механике контакта твердых тел: при контактом взаимодействии двух тел несогласованной формы (задача Герца) и при вдавливании абсолютно жесткого штампа в упругую полуплоскость или полупространство. Научная новизна работы состоит в объединении аналитических и численных подходов для количественной оценки показателей повреждаемости силовой (трибофатической) системы. В результате проведенной работы получены количественные показатели опасного объема (в плоском случае – опасной площади) и интегральной повреждаемости полуплоскости и полупространства, отнесенные к величине прикладываемой нагрузки.

**Ключевые слова:** метод Монте – Карло, метод граничного элемента, напряженно-деформированное состояние, опасный объем, силовая (трибофатическая) система.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования.** Мармыш Д.Е., Бобоед В.И. Метод Монте – Карло для определения и анализа повреждаемости силовой системы. Доклады БГУИР. 2021; 19(1): 21-29.

## MONTE CARLO METHOD FOR DETERMINATION AND ANALYSIS DAMAGE OF THE POWER SYSTEM

DZIANIS E. MARMYSH, ULADZISLAVA I. BABAED

<sup>1</sup>Belarusian State University (Minsk, Republic of Belarus)

<sup>2</sup>Dalian University of Technology (Dalian, People's Republic of China)

Submitted 5 February 2020

© Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2021

**Abstract.** The purpose of the work, the results of which are presented within the framework of the article, was to develop algorithms for calculating the damage to a solid or a system of solids based on the Monte Carlo method and the analytical boundary element method. The analytical boundary element method was used to calculate and analyze the stress-strain state of a solid under the distributed surface load. Based on indicators of the stress state, the algorithms for numerically assessing the dangerous volume and integral damage using the Monte Carlo methods, have been developed. Based on the pattern of distribution of stress fields, the technique of determining the area for randomly generating integration nodes is described. General recommendations have been developed for determining the boundaries of a subdomain containing a dangerous volume. Based on the features of the Monte Carlo methods, a numerical assessment of the indicators of damage of continuous media for a different number of integration nodes was carried out. Methods and algorithms were used to calculate the dangerous volume and integral damage in the plane and spatial cases for the two most common laws of the distribution of surface forces in the contact mechanics of solids: in case of contact interaction of two non-conformal bodies (Hertz problem) and when a non-deformable rigid stamp is pressed into elastic half-plane or half-space. The scientific novelty of the work is to combine analytical and numerical approaches for the quantitative assessment of damage indicators of the power system. As a result the quantitative indicators of the dangerous volume (in the flat case – the dangerous area) and the integral damage of the half-plane and half-space related to the value of the applied load are obtained.

**Keywords:** Monte Carlo method, boundary element method, stress-strain state, dangerous volume, power (tribo-fatigue) system.

**Conflict of interests.** The authors declare no conflict of interests.

**For citation.** Marmysh D.E., Babaed U.I. Monte Carlo method for determination and analysis damage to the power system. Doklady BGUIR. 2021; 19(1): 21-29.

### Введение

В настоящее время большое количество теоретических и экспериментальных работ в мировой литературе направлены на решение фундаментальной научной проблемы машиноведения, связанной с получением адекватных количественных оценок прочности, живучести и разрушения материалов и конструкций. Трудности в использовании только физических концепций и методов исследования прочности, ресурса и разрушения твердых тел приводят к необходимости разработки математических методов и подходов, основанных на комплексном использовании методов расчета напряженно-деформированного состояния, методов механики повреждаемости, учитывающих особенности нагружения исследуемых объектов и систем, а также условия их эксплуатации. Эксплуатационные условия большинства ответственных технических систем характеризуются многопараметрическими нестационарными механическими воздействиями, влиянием внешних полей различной природы, вследствие чего развиваются различные усталостные процессы в конструкционных материалах и исчерпывается назначенный ресурс конструктивных элементов систем.

В работах [1, 2] разработаны феноменологические подходы к прогнозированию ресурса материала, основанные на вычислении единого показателя интегральной повреждаемости

среды. Конкретные численные значения повреждаемости позволяют дать качественную оценку условиям работы и дать рекомендации по их изменению для рассматриваемой технической системы.

Методы, основанные на адекватном математическом моделировании физических процессов деградации материала, позволяют проанализировать и спрогнозировать развитие поврежденности в любой зоне конструктивных элементов по фактической истории их нагруженности с учетом конструктивных, технологических, эксплуатационных и физических особенностей каждой зоны [3, 4].

### Математическая теория повреждаемости среды

Введем механический параметр  $\varphi$  как локальную характеристику повреждаемости среды  $\Omega$  в точке  $A$  и определим его как отношение абсолютного значения действующих напряжений  $\sigma$  в точке  $A$  к некоторому предельному напряжению  $\sigma^{(*\text{lim})}$ , установленному для данного материала<sup>1</sup>, т. е.

$$\varphi = \frac{|\sigma|}{\sigma^{(*\text{lim})}}. \quad (1)$$

Выделим элементарный параллелепипед со сторонами  $dx, dy, dz$  с центром в точке  $A$ . Элементарный опасный объем, соответствующий точке  $A$ , определим как функцию параметра  $\varphi$ , определяемого формулой (1):

$$dV = \begin{cases} dx dy dz, & \varphi \geq 1 \\ 0, & \varphi < 1. \end{cases} \quad (2)$$

Интегрирование выражения (2) по всей области  $\Omega$  определит величину опасного объема, т. е.

$$V = \int_{\Omega} dV. \quad (3)$$

Таким образом, получаем, что опасный объем – это область рассматриваемой среды, в каждой точке которой величина напряжений  $\sigma$  превышает предельные напряжения  $\sigma^{(*\text{lim})}$ . Также введем понятие повреждаемости  $\Psi$  среды как интегральную характеристику вероятности появления и дальнейшего распространения первичных разрушений среды:

$$\Psi = \int_{\Omega} \varphi dV. \quad (4)$$

В работе [2] разработана концепция тела с опасным объемом, обсуждается вопрос о вероятностном понимании повреждаемости и описываются критериальные условия для ограничения опасных объемов в силовых (трибофатических) системах.

Считая, что действующие напряжения  $\sigma$  определяются функцией радиус вектора  $\mathbf{x}$ , т. е.  $\sigma = f(\mathbf{x})$ , тогда при вычислении опасного объема приходим к неравенству

$$\sigma = f(\mathbf{x}) \geq \sigma^{(*\text{lim})}. \quad (5)$$

При рассмотрении пространственных задач о напряженно-деформированном состоянии интегралы (3) и (4) берутся по трехмерной области  $\Omega$ , напряжения в каждой точке которой удовлетворяют неравенству (5). Для (3) и (4) получить аналитическое выражение в общем виде не представляется возможным, во-первых, из-за сложности функции  $f(\mathbf{x})$  в неравенстве (5),

---

<sup>1</sup> Мармыш Д.Е. Численно-аналитическое моделирование напряженно-деформированного состояния и повреждаемости механической системы, работающей в условиях контактного взаимодействия и изгиба: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Минск; 2018:77.

по которой вычисляются действующие напряжения в точке среды исходя из принятой теории прочности; во-вторых, в силу сложной геометрии поверхности области, содержащей опасный объем, вид и аналитическая форма которой заранее неизвестны. На рис. 1 представлена геометрия опасного объема, возникающего при контактном взаимодействии в системе ролик – вал [5].

Аналитическое определение расположения опасного объема позволяет выработать оптимальные режимы обработки, упрочнения материала всех составляющих элементов системы. Кроме того, как показано в работе [6], определение величины опасного объема и повреждаемости позволяет проводить оптимизацию условий эксплуатации путем добавления дополнительной нагрузки в системе с целью уменьшения количественных показателей повреждаемости, уменьшения градиента напряжений и рассредоточения опасного объема в большей части рабочего объема тела.

### Интегрирование методом Монте – Карло

В пространственном случае задача о вычислении повреждаемости среды сводится к вычислению интегралов (3) и (4) кратности три от единичной функции или от функции локальной повреждаемости (1). Как уже отмечалось ранее, получить аналитическое выражение для опасного объема и интегральной повреждаемости в общем случае не представляется возможным, поэтому для вычисления интегралов (3) и (4) применяют различные численные процедуры, одними из которых являются методы Монте – Карло или квази Монте – Карло.

Рассмотрим интеграл от функции  $f(\mathbf{x}) = f(u_1, u_2, \dots, u_r)$ , зависящей от  $r$  переменных  $u_1, u_2, \dots, u_r$  и определенной на единичном гиперкубе  $H^r = [0, 1]^r$ . Оценка интеграла от функции  $f(\mathbf{x})$  методом Монте – Карло сходится к своему точному значению [7]

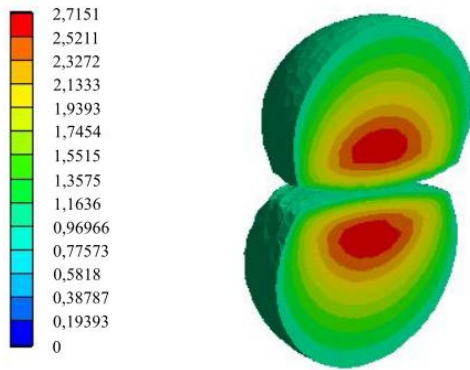
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\mathbf{x}^{(n)}) = \int_{H^r} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(u_1, \dots, u_r) \prod_{j=1}^r du_j. \quad (6)$$

Кроме того, выполняется равенство

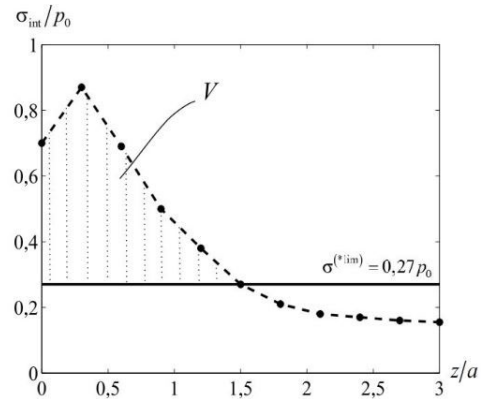
$$\frac{1}{N} \int_{H^r} [f(\mathbf{x}) - I]^2 d\mathbf{x} = \frac{\sigma^2(f)}{N}, \quad (7)$$

где  $\sigma(f)$  – среднеквадратическое отклонение.

Методы Монте – Карло обеспечивают точность порядка  $C/\sqrt{N}$ , где  $N$  – число узлов интегрирования, поэтому основное внимание направляется на выбор такой модели, в которой константа  $C$  в оценке  $C/\sqrt{N}$  была бы как можно меньше. Для этого строятся различные способы ускорения, использующие те или иные свойства интегрируемой функции [8]. В частности, при вычислении опасного объема и интегральной повреждаемости предварительно проводится исследование напряженного состояния и распределения напряжения, по которому считается повреждаемость вдоль координатных осей. Исходя из выбранного значения предельного напряжения  $\sigma^{(*\text{lim})}$ , определяются размеры трехмерной области, из которой в дальнейшем будут случайным образом генерироваться координаты узлов интегрирования. В работе [9] показано, что при вычислении повреждаемости полупространства от эллиптически распределенного давления по интенсивности напряжений и при уровне предельных напряжений  $\sigma^{(*\text{lim})} = 0,27 p_0$  ( $p_0$  – значение контактного давления в центре эллиптической площадки), величину области генерации узлов интегрирования вдоль оси  $Oz$  целесообразно брать не более чем  $z/a = 1,5$ , где  $a$  – большая полуось эллипса. Исходя из рис. 2 пределы интегрирования в формулах (3) и (4) вдоль оси  $Oz$  необходимо брать от 0 до  $z/a = 1,5$ .



**Рис. 1.** Геометрия опасного объема в системе ролик – вал  
**Fig. 1.** Dangerous volume geometry in the roller / shaft system



**Рис. 2.** Распределение интенсивности напряжений вдоль оси  $Oz$   
**Fig.2.** The distribution of stress intensity along the  $Oz$ -axis

### Повреждаемость в плоской задаче теории упругости

При анализе повреждаемости и вычислении ее количественных показателей необходимо предварительно рассчитать напряженно-деформированное состояние твердого тела. Рассмотрим тело  $\Omega$  с границей  $\omega$  и расположенное в плоскости  $Oxy$ . По границе  $\omega$  распределена поверхностная нагрузка  $p(s)$ . Для вычисления компонент тензора напряжений в точке  $A \in \Omega \cup \omega$  воспользуемся известными формулами метода граничных интегральных уравнений:

$$\sigma_{ij}(A) = \int_G p(\xi) G_{ij}(s - \xi) d\xi, \quad i, j = \{1, 2\}, \quad (8)$$

где  $G_{ij}(s)$  – фундаментальные решения для сосредоточенной силы.

При произвольном распределении усилий  $p(s)$  интегрирование выражений (8) в аналитической форме затруднительно, поэтому для получения численных значений напряжений в точке  $A$  к (8) можно применить различные численные и/или численно-аналитические методы вычислений. Воспользуемся методом аналитического граничного элемента (ГЭ), развитого в работах [9, 10].

Таким образом, алгоритм определения величин опасного объема и интегральной повреждаемости в твердом теле состоит из следующих этапов:

1) разбиение границы  $\omega$  с распределенной по ней нагрузкой  $p(s)$  на  $n$  ГЭ и аппроксимация на каждом из них кусочно-непрерывным распределением  $p_k(s)$ ;

2) определение напряженного состояния в точке  $A(x_A, y_A) \in \Omega \cup \omega$  от действия нагрузки по каждому ГЭ;

3) суммирование действий по каждому из  $n$  граничных элементов;

4) генерация случайным образом точек  $M_i(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) из области  $D = \{(x, y) : x_1 \leq x \leq x_2; y_1 \leq y \leq y_2\}$ , в которой содержится опасный объем  $V$ ;

5) определение количества точек  $K$ , в которых действующие напряжения  $\sigma^{(i)}$  превышают предельные  $\sigma^{(*lim)}$  ( $K < N$ ).

После выполнения п. 1–5 можно найти величину опасного объема и повреждаемости по формулам:

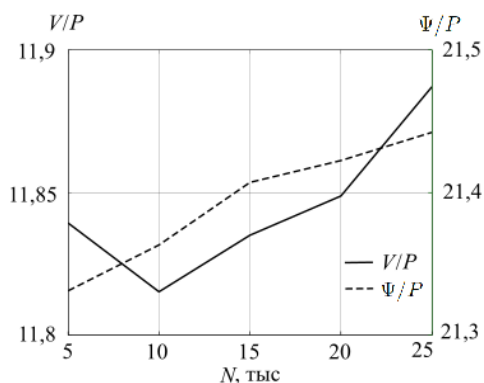
$$V = K \cdot dV, \quad \Psi = dV \cdot \sum_{i=1}^K \frac{\sigma^{(i)}}{\sigma^{(*lim)}}, \quad dV = \frac{(x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)}{N}. \quad (9)$$

Как уже было отмечено ранее, для определения границ области  $D$ , в которой содержится опасный объем, необходимо провести анализ распределения напряжений и вычислить границы, за которыми действующие напряжения не превышают предельные. От точности определения границ, согласно (7), зависит скорость сходимости численного результата к точному.

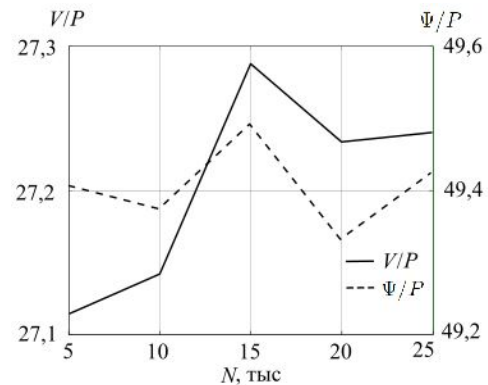
Описанный алгоритм был применен для вычисления повреждаемости в двух наиболее распространенных случаях распределения давления в механике упругого контакта:  $p(x) = p_0 \sqrt{1 - x^2/a^2}$  и  $p(x) = p_0 / \sqrt{1 - x^2/a^2}$ , где  $p_0$  – давление в центре области взаимодействия,  $a$  – длина полуоси контактного отрезка [11]. Распределение первого вида возникает при контактом взаимодействии двух твердых тел несогласованной формы, распределение второго вида – при вдавливании абсолютно жесткого штампа в упругую полуплоскость. Отрезок  $[-a, a]$  распределения поверхностных усилий разбивался на 20 ГЭ, на каждом из которых функция  $p(x)$  аппроксимировалась равномерным распределением, вычисленным в центре элемента. На рис. 3 и 4 представлены графики значений опасного объема и повреждаемости в силовой (трибофатической) системе в зависимости от количества узлов интегрирования  $N$ , вычисленные по эквивалентным напряжениям (по Мизесу) и отнесенные к величине полной нагрузки, которая равна  $P = \pi p_0 a / 2$  для случая несогласованного контакта и  $P = \pi p_0 a$  – для случая вдавливания жесткого штампа. Для обоих случаев значение предельного напряжения бралось равным  $\sigma^{(lim)} = 0,27 p_0$ .

Для сравнения полученных методом Монте – Карло результатов также проводилось вычисление путем построения двумерной регулярной сетки по области  $D = \{(x, y) : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$  с шагами  $h_x = 0,1a$  и  $h_y = 0,1a$  вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно. Численные характеристики повреждаемости получены с точностью  $\delta/a^2 = 0,01$  и равны:

- 1) для случая несогласованного контакта двух твердых тел  $V/P = 11,86$ ,  $\Psi/P = 21,45$ ;
- 2) для случая вдавливания жесткого штампа в упругую полуплоскость  $V/P = 27,25$ ,  $\Psi/P = 49,44$ .



**Рис. 3.** Опасный объем и повреждаемость для случая несогласованного контакта  
**Fig. 3.** Dangerous volume and damageability for non-conformal contact case

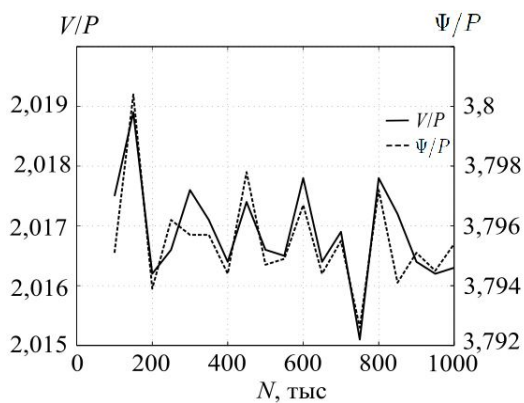


**Рис. 4.** Опасный объем и повреждаемость для случая вдавливания жесткого штампа  
**Fig. 4.** Dangerous volume and damageability for rigid stamp interaction cases

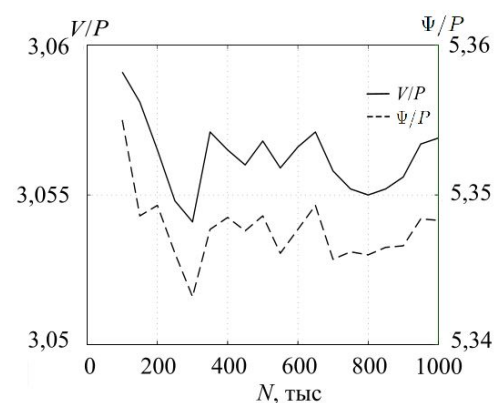
### Повреждаемость для пространственного случая

Рассмотрим задачу о напряженном состоянии упругого полупространства с равномерно распределенной нагрузкой по прямоугольной области  $\Omega = \{(x, y) : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$  и направленной вдоль оси  $Oz$ . Дальнейший анализ будем проводить, взяв в качестве расчетных нормальные напряжения  $\sigma_{zz}$ . В работе [12] получены аналитические формулы для определения

всех компонент тензоров напряжений и деформаций в случае равномерно распределенной по прямоугольной области нагрузки. Для вычисления количественных характеристик опасного объема и повреждаемости можно применить шаги 4 и 5 алгоритма, описанного в предыдущем пункте, с той лишь разницей, что генерация узлов интегрирования  $M(x_i, y_i, z_i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) будет проходить из параллелепипеда  $D = \{(x, y, z) : x_1 \leq x \leq x_2; y_1 \leq y \leq y_2; z_1 \leq z \leq z_2\}$ , в котором содержится опасный объем  $V$ . На рис. 5 и 6 представлены графики опасного объема и интегральной повреждаемости полупространства от равномерно распределенной по квадрату со стороной  $2a$  нагрузки интенсивности  $p_0$ , вычисленные по нормальным напряжениям  $\sigma_{zz}$  и эквивалентным (по Мизесу) напряжениям  $\sigma_{eqv}$  соответственно. В качестве предельного напряжения бралась величина  $\sigma^{(lim)} = 0,27 p_0$  ( $P = p_0 a^2$ ).



**Рис. 5.** Опасный объем и повреждаемость для нормальных напряжений  
**Fig. 5.** Dangerous volume and damageability for normal stress



**Рис. 6.** Опасный объем и повреждаемость для эквивалентных (по Мизесу) напряжений  
**Fig. 6.** Dangerous volume and damageability for equivalent (von Mises) stress

Согласно закону больших чисел, численные значения интеграла, полученные методом Монте – Карло, сводятся к точному значению при увеличении числа наблюдений  $N$ . Из рис. 5, 6 видно, что с увеличением количества расчетных точек относительный разброс в значениях опасного объема и интегральной повреждаемости уменьшается. Если в качестве расчетного количества взять 250 тысяч и более точек, то относительная разница между вычисленными значениями для опасного объема составляет не более 0,2 % и не более 0,1 % для интегральной повреждаемости. Таким образом, можно утверждать об эффективности использования метода Монте – Карло для оценки количественных показателей повреждаемости твердого тела, не прибегая к построению упорядоченных сеток по областям, содержащим опасный объем.

### Заключение

При анализе повреждаемости твердого тела или системы твердых тел в общем случае невозможно получить аналитические выражения для опасного объема и интегральной повреждаемости, поэтому необходимо применение численных подходов. В работе показано, что метод Монте – Карло вместе с методом аналитического граничного элемента является эффективным методом для количественной оценки показателей повреждаемости. Главным недостатком метода Монте – Карло является медленная сходимость численного результата к точному, поэтому, прежде чем приступить непосредственно к вычислению повреждаемости, необходимо провести тщательный анализ напряженно-деформированного состояния тела или системы тел. В работе разработана методика и алгоритмы применения метода Монте – Карло для интегрирования показателей повреждаемости и использованы в плоском и пространственном случаях.

### Список литературы

1. Щербаков С.С., Сосновский Л.А. *Механика трибофатических систем*. Минск: БГУ; 2011.
2. Sosnovskiy L.A. *Tribo-Fatigue. Wear-Fatigue Damage and its Prediction Series: Foundations of Engineering Mechanics*. Springer; 2005.
3. Митенков Ф.М., Большухин М.А., Козин А.В., Коротких Ю.Г., Панов В.А., Пахомов В.А., Каплиенко А.В. Методология оценки ресурса оборудования и систем реакторной установки на базе механики поврежденной среды. *Проблемы прочности*. 2013;4:83-90.
4. Петрунин В.В., Фадеев Ю.П., Панов В.А., Пахомов А.Н., Полуничев В.И., Голубева Д.А. Продление срока эксплуатации и повышение безопасности судовых реакторных установок. *Атомная энергия*. 2013;6:328-333.
5. Мармыш Д.Е. Пространственное напряженно-деформированное состояние и объемная повреждаемость системы «ролик – вал». *Актуальные вопросы машиноведения*. 2015;4:248-251.
6. Щербаков С.С. Оптимизация объемной повреждаемости полупространства, нагруженного эллиптически распределенным контактным давлением и неконтактными напряжениями. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2018;4:96-100.
7. Rubinstein R.Y., Kroese D.P. *Simulation and the Monte Carlo method*. 3rd edition. Wiley; 2016.
8. Гельфанд И.М., Фролов А.С., Ченцов Н.Н. Вычисление континуальных интегралов методом Монте – Карло. *Известия вузов. Математика*. 1958;5:32-45.
9. Мармыш Д.Е. Численно-аналитический метод граничных элементов в плоской контактной задаче теории упругости. *Приложение к журналу «Весті НАНБ»*. 2013;3:42-46.
10. Мармыш Д.Е. Численное моделирование повреждаемости силовой системы. *Теоретическая и прикладная механика*. 2017;32:312-316.
11. Popov V. *Contact mechanics and friction. Physical principles and applications*. Springer; 2010.
12. Щербаков С.С. Определение трехмерного напряженно-деформированного состояния полупространства при действии эллиптически распределенных нормальных и касательных усилий на основе точных решений для равномерной нагрузки. *Весті НАНБ*. 2012;3:50-56.

### References

1. Sherbakov S.S., Sosnovskij L.A. [*Mechanics of tribofatigue systems*]. Minsk: BSU; 2011. (in Russ)
2. Sosnovskiy L.A. *Tribo-Fatigue. Wear-Fatigue Damage and its Prediction Series: Foundations of Engineering Mechanics*. Springer; 2005.
3. Mitenkov F.M., Bolshuhin M.A., Kozin A.V., Korotkih Y.G., Panov V.A., Pakhomov A.N., Kaplienko A.V. [Methodology for assessing the resource of equipment and systems of a reactor installation based on the mechanics of a damaged environment]. *Problemy prochnosti = Strength issues*. 2013;4:83-90. (in Russ)
4. Petrunin V.V., Fadeev Y.P., Panov V.A., Pakhomov A.N., Polunichiev V.I., Golubeva D.A. [Service life extension and safety enhancement of ship reactors]. *Atomnaya energiya = Atomic energy*. 2013;6:328-333. (in Russ)
5. Marmysh D.E. [Spatial stress-strain state and volumetric damage to the roller – shaft system]. *Aktual'nye voprosy mashinovedeniya = Actual issues of engineering*. 2015;4:248-251. (in Russ)
6. Sherbakov S.S. [Optimization of volumetric damage to a half-space loaded with elliptically distributed contact pressure and non-contact stresses]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov = Mechanics of machines, mechanisms and materials*. 2018;4:96-100. (in Russ)
7. Rubinstein R.Y., Kroese D.P. *Simulation and the Monte Carlo method*. 3rd edition. Wiley; 2016.
8. Gelfand I.M., Frolov A.S., Chencov N.N. [Monte Carlo Calculation of Continual Integrals]. *Izvestiya vuzov. Matematika*. 1958;5:32-45. (in Russ)
9. Marmysh D.E. [The numerical-analytical method of boundary elements in a plane contact problem of the theory of elasticity]. *Prilozhenie k zhurnalu «Vesci NANB» = Appl. to «Proceedings of the NASB»*. 2013;3:42-46. (in Russ)
10. Marmysh D.E. [Numerical simulation of damage to the power system]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika = Theoretical and applied mechanics*. 2017;32:312-316. (in Russ)
11. Popov V. *Contact mechanics and friction. Physical principles and applications*. Springer; 2010.
12. Sherbakov S.S. [Determination of three-dimensional stress-strain state of half-space under the action of elliptically distributed normal and tangential forces based on exact solutions for uniform load]. *Vesci NANB = Proceedings of the NASB*. 2012;3:50-56. (in Russ)



### Вклад авторов

Мармыш Д.Е. сформулировал задачу вычисления повреждаемости среды, разработал метод дискретизации распределенной нагрузки и применил его для вычисления напряженно-деформированного состояния твердого тела.

Бобоед В.И. разработала алгоритм вычисления показателей повреждаемости, основанный на методе Монте – Карло, и провела компьютерное моделирование в плоском и пространственном случаях.

### Authors' contribution

Marmysh D.E. formulated the problem of calculating the damageability of the medium, developed the method of discretization of the distributed load and applied it to calculate the stress-strain state of a solid body.

Babaed U.I. developed an algorithm for calculating the damageability indicators based on the Monte Carlo method and performed the computer modeling in plane and spatial cases.

### Сведения об авторах

Мармыш Д.Е., к.ф.-м.н., доцент кафедры теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета; заместитель директора Совместного института ДПУ-БГУ Даляньского политехнического университета.

Бобоед В.И., магистрант механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

### Information about the authors

Marmysh D.E., PhD, Associate Professor of the Theoretical and Applied Mechanics Department of the Belarusian State University; vice-director of the DUT-BSU Joint Institute of the Dalian University of Technology.

Babaed U.I., Master Student of the Mechanics and Mathematics Faculty of the Belarusian State University.

### Адрес для корреспонденции

220030, Республика Беларусь,  
г. Минск, пр-т Независимости, 4, каб. 357,  
Белорусский государственный университет  
тел. +375-29-878-69-16;  
e-mail: marmyshdenis@mail.ru  
Мармыш Денис Евгеньевич

### Address for correspondence

220030, Republic of Belarus,  
Minsk, Nezavisimisti ave., 4, room 357,  
Belarusian State University  
tel. +375-29-878-69-16;  
e-mail: marmyshdenis@mail.ru  
Marmysh Dzianis Evgenievich