



<http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2020-18-1-35-42>

*Оригинальная статья*  
*Original paper*

УДК 519.16

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С МНОГОПОЗИЦИОННЫМИ ВИДАМИ МОДУЛЯЦИИ И КОДИРОВАНИЕМ ПО АЛГОРИТМУ РИДА–СОЛОМОНА

ЛИПКОВИЧ Э.Б., КОВШИК В.А., СЕРЧЕНЯ А.А.

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
(г. Минск, Республика Беларусь)*

*Поступила в редакцию 1 июля 2019*

© Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 2020

**Аннотация.** Целью статьи является разработка аналитических моделей расчета помехоустойчивости и эффективности цифровых систем радиосвязи, использующих многопозиционные виды модуляции (КАМ-М, ФМ-М, ЧМ-М, АМ-М) и блочное кодирование по алгоритму Рида–Соломона (РС) с жестким декодированием. В отличие от известных подходов к определению помехоустойчивости систем предлагаются расчетные модели, не требующие знания коэффициентов спектра кода, привлечения процедур компьютерного моделирования и графических построений кривых помехоустойчивости для различных видов модуляции и параметров кодирования. Приведенные в статье расчетные соотношения включают только основные показатели кода (свободное расстояние, длину кодового слова, относительную скорость кода) и вида модуляции (порядок модуляции, квадрат коэффициента помехоустойчивости). Они позволяют напрямую определять теоретически требуемые значения отношения сигнал/шум (ОСШ) на входе приемных устройств по заданной вероятности ошибки на выходе декодера РС, а также проводить исследования энергетического выигрыша от кодирования (ЭВК), информационной и спектральной эффективностей систем. Базируясь на предложенных соотношениях, выполнены расчеты основных характеристик каналов радиосвязи для различных параметров кодов РС, достоверности приема, видов и порядков модуляции. Сравнение приведенных в статье результатов расчета помехоустойчивости и эффективности систем с известными аналогичными характеристиками, полученными в результате компьютерного моделирования, подтверждает правильность представленных аналитических моделей. Погрешность построенных кривых помехоустойчивости не превышает 0,1 дБ в рабочем диапазоне ОСШ. Представленные в статье материалы являются оригинальными и могут быть использованы при проектировании, расчете и разработке наземных и спутниковых систем.

**Ключевые слова:** вероятность ошибки, относительная скорость кода, жесткое декодирование, свободное расстояние кода, эффективность системы.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования.** Липкович Э.Б., Ковшик В.А., Серченя А.А. Аналитическая модель расчета помехоустойчивости систем с многопозиционными видами модуляции и кодированием по алгоритму Рида–Соломона. Доклады БГУИР. 2020; 18(1): 35-42.

## ANALYTICAL MODEL OF NOISE STABILITY CALCULATION OF SYSTEMS WITH MULTIPositional MODULATION AND CODING BY REED-SOLOMON ALGORITHM

EDUARD B. LIPKOVICH, VICTORIYA A. KOVSHIK, ANNA A. SERCHENYA

*Belorussian state university of Informatics and Radioelectronics  
(Minsk, Republic of Belarus)*

*Submitted 1 July 2019*

© Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2020

**Abstract.** The aim of this article is to create analytical models that estimate the continuity and effectiveness of digital radio communication systems using multipositional types of modulation (CAM-M, PM-M, FM-M, AM-M) and block coding according to the Reed–Solomon algorithm (RS) with hard decoding. In contrast to the well-known approaches to determining the noise immunity of systems that require computation model, new estimating models are presented that do not require knowledge of the spectrum coefficients, computer simulation training methods and graphical construction of interference curves for various types of modulation and coding parameters. The calculated ratios presented in the article include only the main parameters of the code (free distance, codeword length, relative code speed) and of the modulation type (modulation order, squared noise immunity). They make it possible to directly determine the theoretically required values of signal-to-noise ratios (SNR) for input devices from given probabilistic errors based on RS signals, as well as to study the energy gain from coding (EGC), accessible and frequency-efficient systems. Based on the proposed ratios, the calculations of the main characteristics of the communication channels for various parameters of the RS codes, the reliability of reception, types and orders of modulation are performed. Comparison of the results of calculation of noise immunity and system effectiveness given in the article with known similar characteristics obtained as a result of computer modeling confirms the correctness of the presented analytical models. The error of the constructed noise immunity curves does not exceed 0.1 dB in the operating range of the SNR. The materials presented in this article are original and can be used in the design, calculation and development of terrestrial and satellite systems.

**Keywords:** error probability, relative code speed, hard decoding, free code distance, system efficiency.

**Conflict of interests.** The authors declare no conflict of interests.

**For citation.** Lipkovich E.B., Kovshik V.A., Serchenya A.A. Analytical model of noise stability calculation of systems with multipositional modulation and coding by Reed–Solomon algorithm. Doklady BGUIR. 2020; 18(1): 35-42.

### Введение

К настоящему времени создано значительное число кодеков с различной структурой построения и способами исправления ошибок для повышения помехоустойчивости каналов наземного, спутникового и кабельного вещания, а также систем интерактивной связи и беспроводного доступа к информационным ресурсам. Однако расчет базовых характеристик этих систем (пороговая чувствительность, энергетический потенциал радиолиний, информационная эффективность, энергетический выигрыш от кодирования и др.) с учетом помехоустойчивого кодирования и многопозиционных видов модуляции является достаточно трудоемким процессом ввиду отсутствия простых и достаточно точных аналитических моделей расчета.

Коды РС относятся к подклассу двоичных блочных кодов, которые обладают максимальным достижимым расстоянием Хэмминга  $d_M$  при равной для них относительной скорости кода  $R_K = k/n$ . Символы кодового слова представляют собой элементы поля Галуа  $GF(2^l)$ , где  $l$  – степень поля Галуа или число бит в символе. Записывается код как  $(n, k, t)$ , где

$n = 2^l - 1$  – длина кодового слова;  $k$  – число информационных символов в кодовом слове;  $t = (n - k) / 2$  – количество исправляемых символов. Минимальное кодовое расстояние по Хэммингу  $d_M = 2t + 1$ . Коды РС способны исправлять не только ошибки в символах, но и случайные однократные пакеты ошибок длиной до  $l(t + 1) + 1$ . При длине кодового слова  $n < 2^l - 1$  коды РС считаются укороченными.

При оценке помехоустойчивости систем с кодами РС из-за сложности определения коэффициентов распределения спектра кода часто используют «оценку сверху», т. е. границу вероятности ошибки на бит информации на выходе декодера [1]

$$P_b \leq \frac{2^{l-1}}{2^l - 1} \cdot \sum_{j=t+1}^n \frac{j+t}{n} \binom{n}{j} P_S^j (1 + P_S)^{n-j}, \quad (1)$$

где  $P_S$  – вероятность ошибки на символ на входе декодера РС;  $\binom{n}{j} = n! / j!(n - j)!$  – число различных способов выбора из  $n$  символов в кодовом слове  $j$  ошибочных.

Взаимосвязь между вероятностью ошибки на символ  $P_S$  и на бит  $P_q$  на входе декодера следующая:

$$P_S = 1 - (1 - P_q)^l; \quad P_q = C_i \cdot \operatorname{erfc}(Z), \quad (2)$$

где  $C_i$  – коэффициент, зависящий от вида и порядка модуляции;  $\operatorname{erfc}(Z)$  – дополнительный интеграл вероятности.

В (2) вероятность ошибки  $P_q$  на входе декодера функционально связана с параметрами модуляции и демодуляции, а также с величиной ОСШ  $h'_K = (E_0 / N_0)_K$ , при которой должна обеспечиваться вероятность ошибки  $P_b$  на выходе декодера РС. Очевидно, что на основании (1) и (2) прямое аналитическое определение ОСШ затруднено, и поэтому обычно используют компьютерное моделирование для расчета и построения кривых помехоустойчивости  $P_b = \psi(h'_K)$ , по которым для заданного значения  $P_b$  на выходе декодера РС определяется требуемая величина ОСШ.

### Аналитическая модель расчета характеристик системы

Для прямого определения ОСШ в функции  $P_b$  при различных видах и порядках модуляции, а также параметрах кодирования с жестким декодированием предлагается следующее исходное соотношение:

$$P_b = \frac{C_i \cdot \mu_i}{q_i} \cdot \operatorname{erfc}(\sqrt{\mu_i \cdot h'_K}), \quad (3)$$

где  $\mu_i$  – показатель эффективности процесса декодирования используемых сигналов;  $q_i = d_{0i}^2 / 4E_0$  – квадрат коэффициента помехоустойчивости;  $d_{0i}$  – евклидово расстояние между ближайшими точками сигнального созвездия заданного вида модуляции;  $E_0$  – энергия, затрачиваемая на передачу бита информации.

С учетом того, что дополнительный интеграл вероятности

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_z^{\infty} \exp(-t^2) dt \cong \frac{1}{z \cdot \sqrt{\pi}} \cdot 10^{-z^2/2,3}, \quad (4)$$

то выражение (3) приводится к виду

$$P_b = \frac{C_i \cdot \sqrt{\mu_i}}{q_i \cdot \sqrt{\pi \cdot h_k}} \cdot 10^{-\mu_i \cdot h_k / 2,3}. \quad (5)$$

Применив к выражению (5) логарифмирование и метод последовательных приближений, получим в явном виде искомую зависимость ОСШ в функции  $P_b$  без необходимости привлечения процедур компьютерного моделирования:

$$h_k = 10 \cdot \lg \left[ \frac{2,3(B_i - \lg \sqrt{(2,3 \cdot B_i / \mu_i)})}{\mu_i} \right], \text{ дБ}; \quad (6)$$

$$B_i = -\lg P_b - \lg(\sqrt{\pi \cdot q_i} / C_i) + \lg(\sqrt{\mu_i / q_i}); \quad (7)$$

$$\mu_i = \beta_i \cdot q_i \cdot R_k \cdot (t + 1); \quad (8)$$

$$\beta_i = \left[ 1 - \frac{L_d}{3,5 \cdot \sqrt{P_b} \cdot L_d - \lg P_b} \right] / \left[ 1 + \lg \frac{(t + 1)}{(1 - R_k)(-\lg P_b)} \right]; \quad (9)$$

$$L_d = \lg[R_k(t + 1)\sqrt{d_m \cdot q_i}], \quad (10)$$

где  $\beta$  – показатель взаимосвязи между параметрами кода и величиной ошибки  $P_b$ .

Для модуляций видов КАМ-М, ФМ-М, ЧМ-М и АМ-М значения коэффициентов  $C_i$  и  $q_i$  рассчитываются по формулам:

$$C_1 = 2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) / m; \quad q_1 = 3 \cdot m / 2 \cdot (M - 1) \text{ – для КАМ-М с } m = 2, 4, 6 \dots; \quad (11)$$

$$C_2 = 2/m; \quad q_2 = 3 \cdot m / 2 \cdot (M - 0,5) \text{ – для КАМ-М с } m = 3, 5, 7 \dots; \quad (12)$$

$$C_3 = 0,5 \text{ при } m = 1, \quad C_3 = 1/m \text{ при } m \geq 2; \quad q_3 = m \cdot \sin^2(\pi/M) \text{ – для ФМ-М с } m = 1, 2, 3 \dots; \quad (13)$$

$$C_4 = M/4; \quad q_4 = m/2 \text{ – для ЧМ-М с } m = 1, 2, 3 \dots; \quad (14)$$

$$C_5 = (M - 1)/m \cdot M; \quad q_5 = 3m/(M^2 - 1) \text{ – для АМ-М с } m = 1, 2, 3 \dots; \quad (15)$$

где  $M$  – порядок модуляции;  $m = \log_2 M$  – кратность модуляции.

Вероятность ошибки  $P_q$  на входе декодера РС и его исправляющая способность  $I_d$  для рассчитанного по (6) значению ОСШ определяются на основании соотношений:

$$P_q = \frac{C_i}{\sqrt{\pi \cdot R_k \cdot q_i \cdot h_k}} \cdot 10^{-R_k \cdot q_i \cdot h_k / 2,3}; \quad I_d = P_q / P_b. \quad (16)$$

Энергетическая эффективность от кодирования для принятых параметров модуляции, кодирования и декодирования определяется энергетическим выигрышем от кодирования  $\Delta G$ . Величина  $\Delta G$  характеризует меру снижения ОСШ при наличии кодирования по сравнению с режимом без кодирования для равных ошибок на выходе устройств

$$\Delta G = h_0 - h_k, \text{ дБ}, \quad (17)$$

где  $h_0$  – ОСШ при отсутствии кодирования и декодирования.

Для многопозиционных видов модуляции при  $P_b \leq 10^{-2}$  значение  $h_0$  в отсутствие кодирования определяется по формулам:

$$h_0 = 10 \cdot \lg \left[ \frac{2,3(A_i - \lg(\sqrt{2,3 \cdot A_i / q_i}))}{q_i} \right], \text{ дБ.} \quad (18)$$

$$A_i = -\lg P_b - \lg(\sqrt{\pi \cdot q_i} / C_i), \text{ дБ.} \quad (19)$$

Подставив в формулу (17) приведенные выражения для  $h_0$  и  $h_k$ , получим

$$\Delta G = 10 \lg [R_k \cdot (t+1) \cdot \beta_i \cdot \xi_i], \text{ дБ,} \quad (20)$$

$$\xi_i = (A_i - \lg \sqrt{2,3 A_i / q_i}) / (B_i - \lg \sqrt{2,3 B_i / \mu_i}). \quad (21)$$

Из (20) и (21) следует, что если значения  $\beta_i$  и  $\xi_i$  стремятся к единице, то выражение (20) приводится к известному виду

$$\Delta G = 10 \lg [R_k \cdot (t+1)], \text{ дБ.} \quad (22)$$

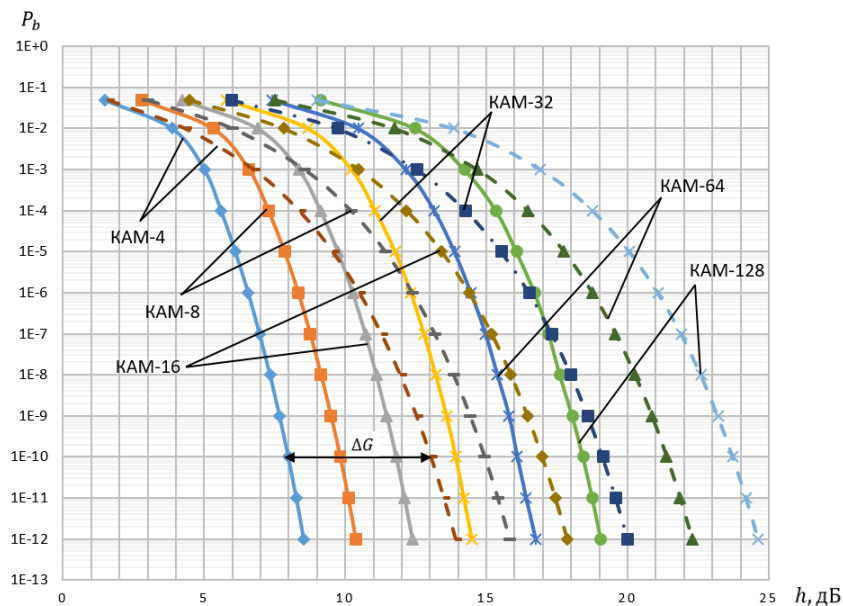
Достоинство полученных выражений (20) и (21) состоит в том, что они позволяют напрямую определять энергетическую эффективность кода для заданного уровня ошибок и принятых параметров кодирования и модуляции. Формула (22) служит лишь оценкой асимптотического значения ЭВК.

В таблице приведены рассчитанные по полученным формулам значения ОСШ и ЭВК при использовании модуляции КАМ-4, различных параметров кода РС и вероятностях ошибок на выходе декодера  $10^{-3}$  и  $10^{-6}$ .

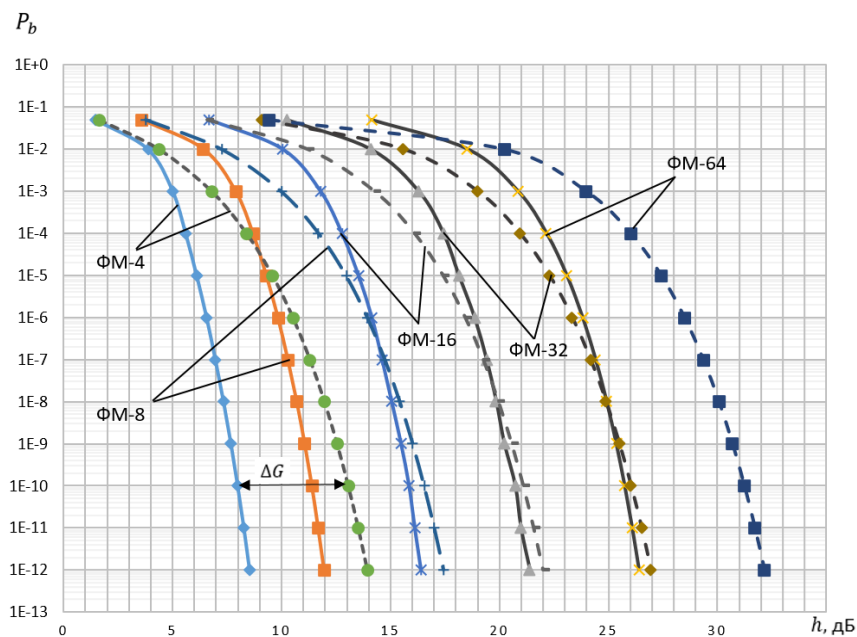
**Таблица.** Значения ОСШ и ЭВК для различных параметров кода РС, дБ  
**Table.** Values of SNR and EGC for various parameters of RS code, db

Значения Value		Параметры кода РС ( $n, k, t$ ) Parameters of RS code ( $n, k, t$ )						
		(7,3,2)	(15,9,3)	(31,23,4)	(31,13,9)	(255,243,6)	(255,239,8)	(255,223,16)
$P_b = 10^{-3}$	$h_k$ , дБ	7,28	6,28	5,75	5,56	5,66	5,12	4,0
	$\Delta G$ , дБ	-0,49	0,51	1,04	1,2	1,13	1,67	2,78
$P_b = 10^{-6}$	$h_k$ , дБ	9,87	8,42	7,72	7,26	7,50	6,67	4,72
	$\Delta G$ , дБ	0,65	2,09	2,79	3,26	3,02	3,85	5,80

Из анализа данных таблицы следует, что с ростом исправляющей способности кода  $t$  и увеличением длины кодового слова  $n$  требуемые значения ОСШ для реализации необходимой достоверности приема снижаются, увеличивается помехоустойчивость и растет энергетический выигрыш от кодирования  $\Delta G_i$ . Однако с увеличением длины кодового слова повышается сложность реализации устройств. Поэтому при больших длинах кодовых слов и размеров символов используют укороченные коды и высокие значения  $R_{PC}$ . Для наглядности поведения кривых помехоустойчивости на рис. 1, 2 представлены результаты расчета зависимостей для укороченного кода РС (204, 188,  $t = 8$ ) при использовании модуляции КАМ-М и ФМ-М. На этих же рисунках для оценки эффективности кода приведены рассчитанные по (18) и (19) зависимости в отсутствие кодирования (пунктир). Значения ЭВК, например, для  $P_b = 10^{-10}$  при использовании КАМ-4 и ФМ-4 составляют 5 дБ и незначительно увеличиваются с ростом порядка модуляции.



**Рис. 1.** Кривые помехоустойчивости для КАМ-М при использовании кодирования кодом Рида–Соломона (сплошная линия) и при его отсутствии (пунктирная линия)  
**Fig. 1.** Noise immunity curves for KAM-M when using coding by the Reed–Solomon code (solid line) and in its absence (dashed line)



**Рис. 2.** Кривые помехоустойчивости для ФМ-М при использовании кодирования кодом Рида–Соломона (сплошная линия) и при его отсутствии (пунктирная линия)  
**Fig.2.** Noise immunity curves for FM-M when using coding by the Reed–Solomon code (solid line) and in its absence (dashed line)

Базируясь на аналитической записи ОИШ, несложно рассчитать многие основные характеристики каналов связи и, в частности, информационную эффективность  $\eta_{\text{инф}}$ . Этот показатель устанавливает потери в информационной скорости передачи данных  $B_0$  для реальных каналов по сравнению с пропускной способностью  $C$  по Шеннону:

$$\eta_{\text{инф}} = B_0/C = 0,3 \cdot \gamma_C / \lg(1 + \gamma_0 \cdot 10^{0,1 \cdot h_{\text{к}}}). \quad (23)$$

В формуле (23) приняты следующие обозначения:  $\gamma_C = m \cdot R_K / b_p$  – спектральная эффективность, бит/с·Гц;  $\gamma_0 = m \cdot R_K$  – удельная скорость, бит/симв;  $b_p$  – коэффициент потерь в использовании выделенной полосы канала связи.

Из (23) следует, что главная задача в повышении  $\eta_{\text{инф}}$  состоит в выборе параметров кода и модуляции, при которых достигается наилучшее использование полосы канала и минимальное значение ОСШ для обеспечения требуемой достоверности приема. Задача по оптимизации характеристик систем может решаться отдельно путем оценки близости энергетической  $\delta h$  или спектральной эффективности  $\delta \gamma$  к предельно возможному показателю по Шеннону:

$$\delta h = h_K - h_{\text{Ш}} = h_K - 10 \lg \left[ \frac{10^{0,3 \cdot \gamma_C} - 1}{\gamma_0} \right], \text{ дБ}; \quad (24)$$

$$\delta \gamma = \gamma_M - \gamma_C = \gamma_C \left( \frac{1}{\eta_{\text{инф}}} - 1 \right), \text{ бит/с·Гц}, \quad (25)$$

где  $h_{\text{Ш}}$  и  $\gamma_{\text{Ш}}$  – энергетическая и спектральная эффективности каналов связи по Шеннону.

### Заключение

Представлены аналитические соотношения для проведения расчетов энергетической, спектральной и информационной эффективностей при использовании многопозиционных видов модуляции (КАМ-М, ФМ-М, ЧМ-М, АМ-М) и блочного кодирования по алгоритму Рида–Соломона. Приведены формулы для оценки энергетического выигрыша от кодирования и исправляющей способности кода РС в зависимости от заданной вероятности ошибки на выходе декодера и параметров кодирования и модуляции. Рассчитаны характеристики помехоустойчивости и ЭВК в системах с кодированием для многопозиционных видов модуляции КАМ-М и ФМ-М. Сравнение расчетных материалов с известными характеристиками подтверждает правильность предложенных аналитических моделей.

### Список литературы

1. Морелос-Сарагоса Р. *Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение*. Минск: Техносфера; 2005.

### References

1. Morelos-Saragosa R. [The art of robust coding. Methods, Algorithms, Application]. Minsk: Technosphere; 2005. (In Russ.)

### Вклад авторов

Липкович Э.Б. сформулировал задачи исследований и определил математические модели.  
Ковшик В.А. выполнила расчеты по предложенным соотношениям.  
Серченя А.А. выполнила анализ состояния по теме статьи и провел сопоставительный анализ рассчитанных показателей с известными результатами.

### Authors contribution

Lipkovich E.B. formulated research tasks and defined mathematical models.  
Kovshik V.A. performed calculations according to the proposed ratios.  
Serchenya A.A. performed a state analysis on the topic of the article and conducted a comparative analysis of the calculated indicators with known results.

### Сведения об авторах

Липкович Э.Б., к.т.н., доцент, доцент Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Ковшик В.А., ассистент кафедры инфокоммуникационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Серченя А.А., магистрант кафедры информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

### Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,  
г. Минск, П. Бровки, д. 6,  
Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники  
+375-44-767-61-23;  
anyaharty@gmail.com  
Серченя Анна Андреевна

### Information about the authors

Lipkovich E.B., PhD, Associate Professor, Associate Professor of Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics.

Kovshik V.A., assistant of Infocommunication Department of Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics.

Serchenya A.A., master-student of Infocommunication Department of Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

### Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,  
Minsk, P. Brovky str., 6,  
Belarusian State University  
of Informatics and Radioelectronics.  
+375-44-767-61-23;  
anyaharty@gmail.com  
Serchenya Anna Andreevna