http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2019-126-8-86-92

Оригинальная статья
Original paper

УДК 517.977

К ЗАДАЧАМ ДВУХУРОВНЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С УСЛОВИЕМ РЕГУЛЯРНОСТИ RCPLD

МИНЧЕНКО Л.И., СИРОТКО С.И.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
г. Минск, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 20 сентября 2019

Аннотация. Задачи многоуровневой оптимизации часто встречаются в различных приложениях (в экономике, экологии, энергетике и других областях) при моделировании сложных систем с иерархической структурой, связанной с неравноправным положением и самостоятельными действиями подсистем. Трудность анализа такого рода сложных систем требует в первую очередь изучения двухуровневых моделей, управление которыми явилось бы составной частью анализа более сложных систем. При решении задач двухуровневого программирования важную роль играет предложенное учеными Ye и Zhu свойство частичной устойчивости, наличие которого позволяет свести двухуровневую задачу к классической задаче нелинейного программирования с негладкой целевой функцией. Известно, что линейные задачи двухуровневого программирования являются частично устойчивыми. Доказательство данного свойства для более сложных задач встречает трудности. В частности, в статье показывается неверность некоторых известных ранее результатов в этой области. Целью данной статьи является доказательство новых результатов по частичной устойчивости задач двухуровневого программирования. Вывод данных результатов в статье основывается на применении обобщенных липшицевых свойств многозначных отображений. В данной статье выводятся новые достаточные условия частичной устойчивости, основанные на модификации известного в литературе условия регулярности RCPLD, предложенного учеными Andreani, Haeser, Schuverdt и Silva. Полученные достаточные условия обобщают известные условия частичной устойчивости для двухуровневых задач и позволяют выделить класс задач, которые могут быть решены редукцией к задаче математического программирования с негладкой целевой функцией.

Ключевые слова: двухуровневое программирование, частичная устойчивость, условия регулярности.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования. Минченко Л.И., Сиротко С.И. К задачам двухуровневой оптимизации с условием регулярности RCPLD. Доклады БГУИР. 2019; 7–8(126): 86-92.

ON THE PROBLEMS OF BILEVEL OPTIMIZATION UNDER RCPLD CONSTRAINT QUALIFICATIONS

LEONID I. MINCHENKO, SERGEY I. SIROTKO

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Submitted 20 September 2019

Abstract. Multilevel optimization problems often arise in various applications (in economics, ecology, power engineering and other areas) when modeling complex systems with a hierarchical structure associated with independent actions of subsystems. The difficulty of analyzing such complex systems requires first of all the study of bilevel models, the management of which would be an integral part of the analysis of more complex systems. In solving bilevel programming problems, an important role is played by the property of partial calmness, the presence of which allows us to reduce the bilevel problem to the classical nonlinear programming problem with a nonsmooth objective function. It is known that linear bilevel programming problems are partially stable. The proof of this property for more complex problems meets difficulties. In particular, our article shows the inaccuracy of some results in this area. The goal of the paper is to obtain some new results in the partial calmness of bilevel programming. In particular, new sufficient conditions for bilevel problems are proved. The results are obtained on the base of Lipschitz-like properties for multivalued mappings. In the paper we propose new sufficient conditions for partial calmness which are based on some modification of the known constraint qualification RCPLD which have been proposed by the researches Andreani, Haeser, Schuverdt and Silva.

Keywords: bilevel programming, partial calmness, regularity conditions.

Conflict of interests. The authors declare no conflict of interest.

For citation. Minchenko L.I., Sirotko S.I. On the problems of bilevel optimization under RCPLD constraint qualifications. Doklady BGUIR. 2019; 7–8(126): 86-92.

Введение

Задачи двухуровневого программирования [1, 2] возникают при моделировании управления иерархическими системами. Верхний и нижний уровни иерархии принимают определенные решения, преследуя свои цели и используя имеющиеся у них ресурсы. Деятельность всей системы направлена на достижение определенной глобальной цели. Задача заключается в том, чтобы найти такое решение верхнего уровня, которое приводит систему к достижению поставленной глобальной цели.

Пусть $x\in R^n$, $y\in R^m$. Рассмотрим следующую задачу двухуровневого программирования (BLPP) (см. [1]):

$$G(x,\ y)\to \min_{x,y},\ x\in X\subset R. \tag{1}$$

$$y\in S(x)\ Arg\ \min\{\ f(x,\ y)\mid y\in F(x)\ \}, \tag{2}$$

где

$$F(x)=\{\ y\in R^m \mid h_i(x,\ y)\le 0\ \ i\in I,\ h_i(x,\ y)=0\ \ i\in I\ \} \tag{3}$$

и $I=\{1,\ldots,s\}$, $I_0=\{s+1,\ldots,p\}$, функции $G(x,\ y)$, $f(x,\ y)$ и $h_i(x,\ y)$ непрерывны вместе с их производными $\nabla_y f(x,\ y)$ и $\nabla_y h_i(x,\ y)$ $i=1,\ldots,p$.

Часто двухуровневой задаче придают игровое толкование и называют задачу верхнего уровня (1) leader’s problem, а задачу нижнего уровня (2) follower’s problem. Решение задачи нижнего уровня $y(x)\in S(x)$ называется ответной рациональной реакцией на выбор лидером значения x.

Ограничения $x\in X$ и $h_i(x, y)\le 0$ $i\in I$, $h_i(x, y)=0$ $i\in I_0$ называются соответственно ограничениями верхнего и нижнего уровня, переменные x и y переменными верхнего и нижнего уровня. Точка (x, y) называется допустимой точкой в задаче BLPP, если $x\in X$, $y\in S(x)$. Допустимая точка (x^0, y^0) называется решением задачи BLPP, если $G(x_0, y_0)\le G(x, y)$ для всех допустимых точек (x, y).

Известно ([1–4]), что, несмотря на простоту постановки задачи BLPP, ее решение встречает значительные трудности. Одним из возможных подходов к решению задачи BLPP является сведение ее к равносильной одноуровневой негладкой задаче

$$G(x,y)\to \min_{x,y},\ x\in X,\ y\in S(x) = \{y\in F(x) \mid f(x, y)\le \varphi(x)\}, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ – функция оптимального значения задачи нижнего уровня, то есть

$$\varphi(x) = \min\{f(x, y) \mid y\in F(x)\}.$$

Основная трудность решения задачи (4) заключается в наличии негладкого ограничения с функцией $\varphi(x)$. В статье [3] Ye и Zhu ввели следующее понятие частичной устойчивости задачи BLPP. Пусть (x^0, y^0) – решение задачи BLPP. Задача BLPP в форме (4) называется частично устойчивой в (x^0, y^0), если существует число $\mu>0$ такое, что (x^0, y^0) является локальным решением следующей задачи:

$$G(x, y)+\mu(f(x, y)-\varphi(x))\to\min,\ x\in X,\ y\in F(x). \tag{5}$$

Таким образом, наличие частичной устойчивости позволяет свести задачу BLPP к одноуровневой задаче с негладкой целевой функцией, которая существенно проще задачи (4). Большой интерес вызвал результат статьи [4], в которой утверждалось наличие частичной устойчивости BLPP с линейной по переменной y задачей нижнего уровня.

Приведем простой пример, показывающий неверность данного утверждения.

Пример. Пусть $x\in R$, $y\in R^2$, $F(x)=\{\ y\in R^2 \mid y_1\le 0,\ -xy_1+y_2\le 0\ \}$, $f(x, y)=-x^2y_2$, $X=R$, $G(x, y)=xy_1$.

В данном примере решением задачи BLPP является точка (x^0, y^0), где $x^0=0$ и $y^0=(0,0)^T$. В то же время для любого $\mu>0$ получаем $G(x^k,y^k)+\mu(f(x^k,y^k)-\varphi(x^k))<G(x^0, y^0)$ при $x^k=1/k$, $y_1^k=-1/k$, $y_2^k=-1/k^2$, $k=1,2,\ldots$.

То есть (x^0, y^0) не является решением (5).

Положим $h_0(x,y)=f(x,y)-\varphi(x)$. Тогда

$$S(x)=\{\ y\in F(x) \mid h_i(x,y)\le 0 : i\in\{0\}\cup I,\ h_i(x,y)=0 : i\in I_0\ \}. \tag{6}$$

Рассмотрим многозначное отображение $S\colon x\mapsto S(x)$. Обозначим область определения и график многозначного отображения S через $dom\,S=\{\ x\in R^n \mid S(x)\ne\varnothing\ \}$ и $gr\,S=\{\ (x, y) \mid y\in S(x),\ x\in R^n\ \}$ соответственно.

Далее обозначим $I(x, y)=\{\ i\in\{0\}\cup I \mid h_i(x, y)=0\ \}$, через $d(v, C)$ обозначим расстояние от точки $v\in R^m$ до множества $C\subset R^m$, через $|v|$ – евклидову норму вектора v.

В статье принимается следующее, имеющее естественный характер, предположение о задаче BLPP: для каждого выбора стратегии $x\in X\cap dom\,F$ на верхнем уровне найдется ответная реакция нижнего уровня $y(x)\in S(x)$.

В данной заметке доказываются достаточные условия частичной устойчивости задачи BLPP на основе модификации условия регулярности RCPLD (relaxed constant positive linear dependence) из работы Andreani, Haeser, Schuverdt и Silva [5].

Определения и предварительные результаты

Рассмотрим множество $S(x)$, заданное условием (6). Введем касательный и линеаризованный касательный конусы к множеству $S(x)$ в точке $y\in S(x)$:

$T(S(x),y)=\{\ \bar{y}\in R^m \mid \exists t_k\downarrow 0,\ \bar{y}^k\to\bar{y}$ такие, что $y+t_k\,\bar{y}^k\in S(x),\ k=1,2,\dots\ \}$,

$\Gamma(S(x),y)=\{\ \bar{y}\in R^m \mid\ \langle\nabla_y h_i(x,y),\bar{y}\rangle\le 0 : i\in I(x,y)\ \ \langle\nabla_y h_i(x,y),\bar{y}\rangle=0 : i\in I_0\ \}$.

Определение 1. Отображение S полунепрерывно снизу (п.н.сн.) в точке $(x^0,\ y^0)\in gr\,S$ (относительно $X\subset R^n$), если для любой окрестности $V(y^0)$ существует окрестность $V(x^0)$ такая, что $S(x)\cap V(y^0)\neq\varnothing$ для всех $x\in V(x^0)$ (для $x\in V(x^0)\cap X$).

Пусть $J\subset I_0$, $K\subset I(x^0,y^0)$. Следуя [5], будем говорить, что система векторов $\{\nabla_y h_i(x^0,y^0)\ i\in J\cup K\}$ положительно-линейно зависима, если существуют не все равные нулю числа λ_i, где $i\in J\cup K$, такие, что $\lambda_i\ \ge\ 0$ при $i\in K$ и $\sum\limits_{i\in J\cup K}\lambda_i\nabla_y h_i(x^0,y^0)\ =\ 0$.

В [5] для задачи нелинейного программирования предложено ослабленное условие постоянного положительно-линейной зависимости (RCPLD). Ниже вводится необходимая модификация этого условия.

Определение 2. Многозначное отображение S удовлетворяет условию RCPLD$_S$ в точке $(x^0,\ y^0)\in gr\,S$, если существует окрестность V точки $(x^0,\ y^0)$ такая, что:

1) $rank\,\{\nabla_y h_i(x,\ y)\ i\in I_0\}\ =\ const$ при $(x,\ y)\in V\cap gr\,S$;

2) для любого множества индексов $K\subset I(x^0,y^0)$ из положительно-линейной зависимости системы векторов $\{\nabla_y h_i(x^0,\ y^0)\ i\in I_0\cup K\}$ следует линейная зависимость системы векторов $\{\nabla_y h_i(x,\ y)\ i\in I_0\cup K\}$ при всех $(x,y)\in V\cap gr\,S$.

Отметим, что из определения 2 следует, что, если отображение S удовлетворяет RCPLD$_S$ в точке $(x^0,\ y^0)\in gr\,S$, то оно удовлетворяет RCPLD$_S$ в любой точке $(x^0,\ y^0)\in gr\,S$ из некоторой окрестности $(x^0,\ y^0)$.

Следуя [6, 7], введем понятие R-регулярности многозначного отображения S.

Определение 3. Отображение S называется R-регулярным в точке $(x^0,\ y^0)\in gr\,S$ относительно $dom\,S$, если существует число $\alpha\ >\ 0$ и окрестности $V(x^0)$ и $V(y^0)$ такие, что $d(y,S(x))\ \le\ \alpha\ \max\{\ 0,h_i(x,\ y)\ i\in\{0\}\cup I,|h_i(x,\ y)|\ i\in I_0\ \}$ для всех $y\in V(y^0)$ и $x\in V(x^0)\cap dom\,S$.

Лемма 1. Пусть отображение S п.н.сн. в точке $(x^0,\ y^0)\in gr\,S$ относительно $dom\,S$. Тогда функция φ непрерывна в точке x^0 относительно $dom\,S$.

Лемма 2 ([5]). Пусть $y\neq 0$ и $y=\sum\limits_{i=1}^{r+t}\alpha_i v^i$, где векторы $v^1,\dots,\ v^r$ линейно независимы, $\alpha_i\in R,\ i\ =\ 1,\dots,r,\ \alpha_i>0,\ i\ =\ 1,\dots,r+t$. Тогда существует $J\subset\{r+1,\dots,r+t\}$ и числа $\bar{\alpha}_i$, $i\in\{1,\dots,r\}\cup J$, такие, что $y\ =\ \sum\limits_{i\in\{1,\dots,r\}\cup J}\bar{\alpha}_i v^i$, $\bar{\alpha}_i\ >\ 0$ для всех $i\in J$ и векторы v^i, $i\in\{1,\dots,r\}\cup J$, линейно независимы.

Пусть $v\in R^m$. Обозначим $\prod_{S(x)}(v)$ множество точек из $S(x)$ ближайших к v. Тогда $\prod_{S(x)}(v)$ является множеством решений задачи

$$\Phi_v(y)\ =\ |y-v|\to\min,\ y\in S(x). \tag{7}$$

Рассмотрим множество множителей Лагранжа [9] для задачи (7) в точке $y\in\prod_{S(x)}(v)$:

$$\Lambda(x,\ y,\ S)\ =\ \{\ \lambda\in R^{p+1}\ \mid\ \frac{y-v}{|y-v|}+\sum_{i=0}^{p}\lambda_i\nabla_y h_i(x,y)=0,\ \lambda_i\ge 0\ \ i\in\{0\}\cup I,\ \lambda_i\ =\ 0\ \ i\in I\backslash I(x,\ y)\ \},$$

$$\Lambda_v^M(x,\ y,\ S)\ =\ \{\ \lambda\in\Lambda_v(x,y,S)\mid\sum_{i=0}^{p}|\lambda_i|\le M\ \}.$$

Следующая лемма является модификацией теоремы 2 [8], все условия которой выполнены для отображения S ввиду леммы 1.

Лемма 3. Пусть $(x^0,\ y^0)\in gr\,S$ и отображение S п.н.сн. в данной точке относительно $dom\,S$. Тогда следующие утверждения равносильны:

(*a*) отображение S R-регулярно в точке $(x^0,\ y^0)$ относительно $dom\,S$;

(b) существует число $M > 0$ такое, что для любых последовательностей $x^k \to x^0$, $x^k \in dom\, S$, $v^k \to y^0$, $v^k \notin S(x^k)$, справедливо неравенство $\Lambda_v^M(x^k, y^k, S) \neq \varnothing$ при всех $y^k = y(x^k, v^k) \in \prod_{S(x^k)}(v^k)$ и всех достаточно больших k.

Основные результаты

Рассмотрим многозначное отображение S из (7).

Теорема 1. Предположим, что:

(a) S п.н.сн. в $(x^0,\ y^0) \in gr\, S$ относительно $dom\, S$;

(b) существует окрестность $V = V(x^0,\ y^0)$ такая, что $T(S(x), y) = \Gamma(S(x), y)$ для $(x,\ y) \in gr\, S \cap V$;

(c) S удовлетворяет $RCPLD_S$ в $(x^0,\ y^0) \in gr\, S$.

Тогда S R-регулярно в $(x^0,\ y^0)$ относительно $dom\, S$.

Доказательство. Предположим противное, то есть S не является R-регулярным в $(x^0,\ y^0)$ относительно $dom\, S$. Тогда в силу леммы 1 найдутся последовательности $x^k \to x^0$, $x^k \in dom\, S$, $v^k \to y^0$, $v^k \notin S(x^k)$, $y^k = y(x^k, v^k) \in \prod_{S(x^k)}(v^k)$, такие, что либо множество $\Lambda_{v^k}(x^k, v^k, S)$ пусто, либо $d(0, \Lambda_{v^k}(x^k, y^k, S)) \to +\infty$. Не убавив общности, можно считать, что $(x^k, y^k) \in V$ и, значит, $T(S(x^k), y^k) = \Gamma(S(x^k), y^k)$ для всех $k = 1, \ldots$. Поскольку данное равенство является условием регулярности (см. [9]) и гарантирует, что $\Lambda_{v^k}(x^k, y^k, S) \neq \varnothing$, то $d(0, \Lambda\ (x^k, y^k, S)) \to +\infty$. Кроме того, из $v^k \to y^0$ и п.н.сн. отображения S в точке $(x^0,\ y^0)$ следует, что $y^k \to y^0$.

Условие $\Lambda_{v^k}(x^k, y^k, S) \neq \varnothing$ равносильно существованию чисел $\mu_i^k \in R\ \ i \in I^0$, $\mu_i^k \geq 0\ \ i \in I(x^k, y^k)$, таких, что

$$\frac{v^k - y^k}{\left|v^k - y^k\right|} = \sum_{i \in I_0 \cup I(x^k, y^k)} \mu_i^k \nabla_y h_i(x^k, y^k),\ k = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

В силу $RCPLD_S$ в $(x^0,\ y^0)$ найдется окрестность $V(x^0,\ y^0) \subset V$ и множество $I_{01} \subset I_0$, число элементов которого равно $rank\{\nabla_y h_i(x^0,\ y^0)\ i \in I_0\}$, такие, что для всех $(x,\ y) \in gr\ S \cap V(x^0,\ y^0)$ векторы $\{\nabla_y h_i(x,\ y)\ i \in I_{01}\}$ образуют максимальную линейно независимую подсистему среди векторов $\{\nabla_y h_i(x,\ y)\ i \in I_0\}$. Не убавив общности, можно считать, что $(x^k, y^k) \in V(x^0,\ y^0)$ и, следовательно, найдутся $\tilde{\mu}_i^k \in R,\ i \in I_{01}$, такие, что

$$\sum_{i \in I_0} \mu_i^k \nabla_y h_i(x^k, y^k) = \sum_{i \in I_{01}} \tilde{\mu}_i^k \nabla_y h_i(x^k, y^k).$$

Тогда из (8) получим

$$\frac{v^k - y^k}{\left|v^k - y^k\right|} = \sum_{i \in I_{01}} \tilde{\mu}_i^k \nabla_y h_i(x^k, y^k) + \sum_{i \in I(x^k, y^k)} \mu_i^k \nabla_y h_i(x^k, y^k),\ k = 1, 2, \ldots,$$

где векторы $\nabla_y h_i(x^k, y^k),\ i \in I_{01}$, линейно независимы.

Применяя лемму 2 при фиксированном k, получим, что существует множество индексов $I(k) \subset I(x^k, y^k)$ и числа $\alpha_i^k \in R\ \ i \in I_{01}$, $\alpha_i^k \geq 0\ \ i \in I(k)$, такие, что из последнего равенства следует

$$\frac{v^k - y^k}{\left|v^k - y^k\right|} = \sum_{i \in I_{01}} \alpha_i^k \nabla_y h_i(x^k, y^k) + \sum_{i \in I(k)} \alpha_i^k \nabla_y h_i(x^k, y^k),\ k = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

причем векторы $\nabla_y h_i(x^k, y^k),\ i \in I_{01} \cup I(k)$, линейно независимы.

Ввиду конечности множества I, можно выбрать в $\{x^k, y^k, v^k\}$ подпоследовательность (для простоты сохраним для нее то же обозначение), на которой $I(k)$ не зависит от k, то есть $I(k) = I^0$. Тогда из (9) получим, что существуют числа $\tilde{\lambda}_i^k$ $i \in I_{01} \cup I^0$ такие, что

$$\frac{v^k - y^k}{\left|v^k - y^k\right|} = \sum_{i \in I_0' \cup I^*} \tilde{\lambda}_i^k \nabla_y h_i(x^k, y^k), \tag{10}$$

где $\tilde{\lambda}_i^k \geq 0$ $i \in I^0$ и векторы $\nabla_y h_i(x^k, y^k)$, $i \in I_{01} \cup I^0$, линейно независимы.

Положим $\lambda_i^k = \tilde{\lambda}_i^k$ для $i \in I_{01} \cup I^0$ и $\lambda_i^k = 0$ для остальных i из $\{0,1,...,p\}$. Тогда из (10) следует

$$\frac{v^k - y^k}{\left|v^k - y^k\right|} = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i^k \nabla_y h_i(x^k, y^k), \tag{11}$$

где $\lambda^k = (\lambda_0^k, \ldots, \lambda_p^k) \in \Lambda_{v^k}(x^k, y^k, S)$, и, следовательно, $|\lambda^k| \to +\infty$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda^k |\lambda^k|^{-1}$. Тогда, разделив (10) на $|\lambda^k|$ и переходя к пределу, получаем $0 = \sum_{i \in I_{01} \cup I^0} \lambda_i \nabla_y h_i(x^0, y^0)$, $\lambda \neq 0$, что в силу RCPLD$_S$ влечет линейную зависимость векторов $\nabla_y h_i(x^k, y^k)$, $i \in I_{01} \cup I^0$, что противоречит их выбору. Из полученного противоречия вытекает справедливость утверждения теоремы.

Пусть $D = \{ (x,y) \mid h_i(x,y) \leq 0\ i \in I,\ h_i(x,y) = 0\ i \in I_0,\ x \in X \}$.

Теорема 2. Пусть точка (x^0, y^0) является решением задачи BLPP и пусть выполнены условия (A–C) теоремы 1. Предположим, что функция G липшицева на множестве D с константой $l_0 > 0$. Тогда найдется число $\mu_0 > 0$ такое, что для любого $\mu > \mu_0$ точка (x^0, y^0) будет локальным решением задачи

$$G(x,y) + \mu(f(x,y) - \varphi(x)) \to \min,\ (x,y) \in D. \tag{12}$$

Следствие 1. Пусть в задаче BLPP $f(x, y) = \langle a_0(x), y\rangle$, $h_i(x, y) = \langle a_i(x), y\rangle + b_i(x)$ для всех $i = 1,\ldots,p$ и для решения (x^0, y^0) данной задачи выполнены условия (A) и (C) теоремы 1. Предположим, что функция G липшицева на множестве D с константой $l_0 > 0$. Тогда найдется число $\mu_0 > 0$ такое, что для любого $\mu > \mu_0$ точка (x^0, y^0) будет локальным решением задачи (12).

Заключение

В статье получены достаточные условия частичной устойчивости задачи двухуровневого программирования. Полученные достаточные условия основываются на модификации условия регулярности RCPLD [5] и позволяют свести задачу двухуровневой оптимизации к одноуровневой задаче с негладкой целевой функцией. Предложенный подход является эффективным в случае линейности задачи нижнего уровня по переменной нижнего уровня.

Список литературы

1. Dempe S. *Foundations of bilevel programming*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers; 2002.
2. Bard J.F. *Practical Bilevel Optimization*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad. Publishers; 1998.
3. Ye J.J., Zhu D.L. Optimality conditions for bilevel programming problems. *Optimization*. 1995;33:9-27.
4. Dempe S., Zemkoho A.B. Bilevel programming: reformulations, constraint qualifications and optimality conditions. *Mathematical Programming*. 2013;138:447-473.
5. Andreani R., Haeser G., Schuverdt M.L., Silva P.J.S. A relaxed constant positive linear dependence constraint qualification and applications. *Mathematical Programming*. 2012;135:255-273.
6. Федоров В.В. *Численные методы максимина*. Москва: Наука; 1979.
7. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. *Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations*. Dordreht: Kluwer Acad. Publishers; 2002.

8. Minchenko L., Stakhovski S. Parametric nonlinear programming problems under the relaxed constant rank condition. *SIAM J. Optimization*. 2011;21:1314-1332.
9. Гороховик В.В. *Конечномерные задачи оптимизации*. Минск: Издательский центр БГУ; 2007.

References

1. Dempe S. *Foundations of bilevel programming*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers; 2002.
2. Bard J.F. *Practical Bilevel Optimization*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad. Publishers; 1998.
3. Ye J.J., Zhu D.L. Optimality conditions for bilevel programming problems. *Optimization*. 1995;33:9-27.
4. Dempe S., Zemkoho A.B. Bilevel programming: reformulations, constraint qualifications and optimality conditions. *Mathematical Programming*. 2013;138:447-473.
5. Andreani R., Haeser G., Schuverdt M.L., Silva P.J.S. A relaxed constant positive linear dependence constraint qualification and applications. *Mathematical Programming*. 2012;135:255-273.
6. Fedorov V.V. [*Numerical Maxmin Methods*]. Moscow: Nauka; 1979. (In Russ.)
7. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. *Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations*. Dordreht: Kluwer Acad. Publishers; 2002.
8. Minchenko L., Stakhovski S. Parametric nonlinear programming problems under the relaxed constant rank condition. *SIAM J. Optimization*. 2011;21:1314-1332.
9. Gorokhovik V.V. [*Finite-Dimentional Optimization Problems*]. Minsk: Izdatelskij tsentr BGU; 2007. (In Russ.)

Вклад авторов

Оба автора принимали равное участие в получении результатов статьи.

Authors contribution

Both authors participated equally in receiving main results.

Сведения об авторах

Минченко Л.И., д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры информатики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Сиротко С.И., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры информатики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Information about the authors

Minchenko L.I., D.Sci, Professor, Professor of Informatics Department of Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics.

Sirotko S.I., PhD., Associate Professor, Associate Professor of Informatics Department of Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics.

Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,
г. Минск, ул. П. Бровки, д. 6,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
тел. +375-17-293-86-66;
e-mail: sergeyis@bsuir.by
Сиротко Сергей Иванович

Address for correspondence

220013 Republic of Belarus,
Minsk, P. Brovki st., 6,
Belarusian State University
of Informatics and Radioelectronics
tel. +375-17-293-86-66;
e-mail: sergeyis@bsuir.by
Sirotko Sergey Ivanovich