http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2019-126-8-30-37

Оригинальная статья
Original paper

УДК 621.372.51

СИНТЕЗ КВАЗИПОЛОСОВЫХ ЛЕСТНИЧНЫХ ФИЛЬТРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

КУРОЧКИН А.Е.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 15 мая 2018

Аннотация. Цель работы, результаты которой представлены в рамках статьи, заключалась в разработке компьютерной математической модели лестничного фильтра для исследования на его основе особенностей синтеза согласующих цепей произвольного порядка. Для достижения поставленной цели были решены все задачи синтеза, включая выбор прототипа, транспонирование частоты, расчет полюсов передаточной функции прототипа, расчет полюсов передаточной функции фильтра, расчет коэффициента отражения фильтра, расчет входного сопротивления фильтра, реализация лестничной цепи по методу Кауэра и денормирование значений элементов лестничной цепи. Осуществлено моделирование характеристик лестничных фильтров произвольно высокого порядка с частотной характеристикой Чебышева на компьютере с 32-разрядной операционной системой. Показано, что использование стандартной математики приводит к значительному росту погрешности согласования нагрузок при повышении порядка цепи. Для повышения точности расчетов предложено применение программного обеспечения, позволяющего реализовать математические операции над переменными с произвольной длиной мантиссы. Существуют компьютерные библиотеки, где числа представляются в виде переменных строкового типа и над ними осуществляются арифметические операции по школьным правилам «в столбик». По завершении расчетов производится обратное преобразование строк в обычные числа. В статье рассматривается применение варианта библиотеки BigNumber для языка высокого уровня JavaScript. Для оценки точности расчета предложено применять свойство антиметричности лестничной структуры. Из представленных результатов расчета следует, что для получения не менее 15 достоверных цифр после десятичной запятой для параметров фильтра n-го порядка необходимо увеличить длину мантиссы переменных до значения $2n$.

Ключевые слова: согласование сопротивлений, трансформирующий фильтр, транспонирование частоты, аппроксимация, полином Чебышева первого рода, арифметика произвольной точности.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования. Курочкин А.Е. Синтез квазиполосовых лестничных фильтров высокого порядка. Доклады БГУИР. 2019; 7–8(126): 30-37.

Doklady BGUIR
No. 7–8 (126) (2019)

SYNTHESIS OF QUASI BAND LADDER TRANSFORMING HIGH ORDER FILTERS

ALEXANDER E. KUROCHKIN

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Submitted 15 May 2018

Abstract. The purpose of the work, the results of which are presented in the article, was to develop a computerized mathematical model of the ladder filter to study the features of the synthesis of matching chains of any order on its basis. To achieve this goal, all the synthesis tasks were solved, including the choice of the prototype, frequency transposition, calculation of the poles of the transfer function of the prototype, calculation of the poles of the transfer function of the filter, calculation of the reflection coefficient of the filter, the calculation of the input resistance of the filter, the implementation of the ladder chain by the Cauer method and denormalization of the values of the elements of the ladder chain. Modeling of characteristics of ladder filters of any high order with frequency characteristic of Chebyshev on the computer with 32-bit operating system is carried out. It is shown that the use of standard mathematics leads to a significant increase in the error of matching of loads at increasing the order of the chain. To increase the accuracy of calculations it is proposed to use software that allows implementing mathematical operations on variables with any length of the mantissa. There are computer libraries where numbers are presented in the form of string type variables and arithmetic operations are carried out on them according to school rules "in a column". Once the calculations are completed, the strings are converted back to normal numbers. The article considers the application of the variant of BigNumber library for high level JavaScript language. To estimate the accuracy of the calculation it is proposed to apply the property of antimetric ladder structure. From the presented results of the calculation it follows that in order to obtain not less than 15 reliable digits after the decimal point for the parameters of the *n*-th order filter it is necessary to increase the length of the variable mantissa to the value 2*n*.

Keywords: impedance matching, transforming low pass filter, transposing of frequency, approximation, Chebyshev polynomials of the first kind, arbitrary precision arithmetic.

Conflict of interests. The author declares no conflict of interest.

For citation. Kurochkin A.E. Synthesis of quasi band ladder transforming high order filters. Doklady BGUIR. 2019; 7–8(126): 30-37.

Введение

Процедуре синтеза трансформирующих лестничных фильтров нижних частот (ФНЧ) (рис. 1) в технической литературе уделяется внимание.

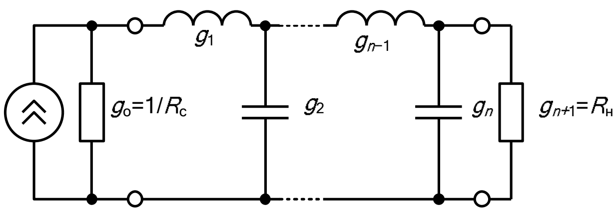

Рис. 1. Лестничный ФНЧ
Fig. 1. Low-pass ladder filter

Таблицы с нормированными параметрами элементов фильтров до 10 порядка предлагаются в [1]. Но многократное моделирование свидетельствует о недостоверности табулированных в [1] данных, начиная с 8-го порядка! В [2] предлагаются громоздкие выражения для расчета согласующих фильтров, но только до 10–14 порядков. Требуется разработка современной методики синтеза ФНЧ произвольного порядка.

Процедура синтеза согласующего ФНЧ

В случае неравных нагрузок характеристика затухания фильтра соответствует рис. 2. Такой тип ФНЧ в [3] определен как квазиполосовой ФНЧ. Основными этапами синтеза согласующего фильтра являются: 1) выбор фильтра-прототипа; 2) транспонирование частоты; 3) расчет полюсов фильтра-прототипа; 4) расчет полюсов согласующего фильтра; 5) расчет коэффициента отражения согласующего фильтра; 6) расчет входного (или выходного) сопротивления фильтра; 7) реализация лестничной цепи по методу Кауэра; 8) денормирование значений элементов лестничной цепи.

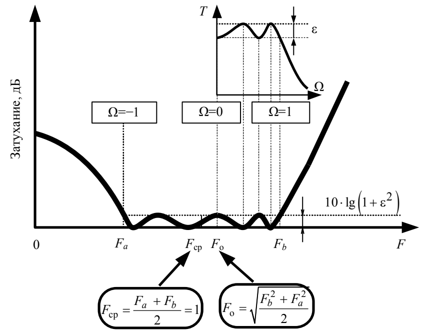

Рис. 2. Формирование характеристики затухания квазиполосового ФНЧ
Fig. 2. The formation of the attenuation characteristics of the quasi-band low-pass filter

Передаточная функция ФНЧ-прототипа описывается выражением

$$K_p = 1/\left[1+\varepsilon^2 \cdot T_n^2(\Omega)\right], \tag{1}$$

где ε – коэффициент неравномерности передачи в полосе пропускания, T_n – многочлен Чебышева первого рода n-го порядка, Ω – нормированная круговая частота.

Для синтеза квазиполосового фильтра следует осуществить транспонирование частоты подстановкой [1]

$$\Omega = \frac{\omega^2-\omega_{\text{о}}^2}{(\omega_b-\omega_a)\cdot\omega_{\text{ср}}} = \frac{\left|\omega^2-\omega_{\text{о}}^2\right|}{A}, \tag{2}$$

где ω_a – нижняя граница полосы пропускания, ω_b – верхняя граница полосы пропускания, ω – текущая круговая частота, $\omega_{\text{о}}^2 = (\omega_b^2+\omega_a^2)/2$, $\omega_{\text{ср}} = (\omega_a+\omega_b)/2$.

Все значения частот нормируются относительно средней частоты полосы пропускания $\omega_{\text{норм}} = \omega_{\text{ср}}$, которая принимается равной единице: $\hat{p} = j\hat{\omega} = j(\omega/\omega_{\text{норм}})$. В [2] нормирование частот предлагается осуществлять относительно частоты $\omega_{\text{норм}} = \omega_{\text{о}} = 1$. Нормированная полоса фильтра-прототипа при нормировании относительно $\omega_{\text{ср}}$ определяется при $\omega_a = 0$ и равна $w = \hat{\omega}_b - \hat{\omega}_a = \hat{\omega}_b = 2$. При нормировании относительно $\omega_{\text{о}} = 1$ нормированная полоса фильтра-прототипа равна $w = \hat{\omega}_b - \hat{\omega}_a = \hat{\omega}_b = \sqrt{2}$. Коэффициент передачи на нулевой частоте определяется исходя из заданных значений сопротивлений источника сигнала $R_{\text{с}}$ и нагрузки $R_{\text{н}}$:

$$K_{po} = 1/\left[1+\varepsilon^2\cdot T_n^2(\hat{\omega}=0)\right] = 1/\left[1+\varepsilon^2\cdot T_n^2\left(\Omega = -\frac{\hat{\omega}_b^2+\hat{\omega}_a^2}{\hat{\omega}_b^2-\hat{\omega}_a^2}\right)\right] = \frac{4R_{\text{с}}R_{\text{н}}}{(R_{\text{с}}+R_{\text{н}})^2}, \tag{3}$$

откуда следует выражение для квадрата коэффициента неравномерности передачи прототипа в рабочей полосе:

$$\varepsilon^2 = \left[\frac{(R_{\text{с}}-R_{\text{н}})^2}{4R_{\text{с}}R_{\text{н}}}\right]\Bigg/ T_n^2\left(\Omega = -\frac{\hat{\omega}_b^2+\hat{\omega}_a^2}{\hat{\omega}_b^2-\hat{\omega}_a^2}\right). \tag{4}$$

Полиномы Чебышева первого рода степени n в диапазоне значений от $\Omega = -1$ до $\Omega = +1$ определяются рекуррентной формулой $T_n(\Omega) = \cos[n \cdot \arccos(\Omega)]$, а вне полосы – через гиперболические функции: $T_n(\Omega) = \mathrm{ch}[n \cdot \mathrm{arch}(\Omega)]$. Так как функция ареа-косинуса не определена для отрицательных значений Ω, для $F<F_a$ ($\hat{\omega} < \hat{\omega}_a$) и $F>F_b$ ($\hat{\omega} > \hat{\omega}_b$) в (2) предусмотрен знак модуля разности $(\omega^2 - \omega_{\text{o}}^2)$.

Характеристика затухания квазиполосового фильтра имеет вид $L = 1 + \varepsilon^2 \mathrm{ch}^2 \left[\frac{n}{2} \cdot \mathrm{arch}\left(\frac{\hat{\omega}_{\text{o}}^2 - \hat{\omega}^2}{\hat{\omega}_{\text{o}}^2 - \hat{\omega}_a^2} \right) \right]$, а для полосы пропускания $- L = 1 + \varepsilon^2 \cos^2 \left[\frac{n}{2} \cdot \arccos\left(\frac{\hat{\omega}_{\text{o}}^2 - \hat{\omega}^2}{\hat{\omega}_{\text{o}}^2 - \hat{\omega}_a^2} \right) \right]$.

Полюсы фильтра-прототипа Чебышева $\hat{P}_k = \mathrm{Re}(\hat{P}_k) + j\,\mathrm{Im}(\hat{P}_k)$ для $k = 1, 2, \ldots, n$ определяются из уравнения $1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega) = 0$ с учетом замены $\Omega = (\hat{p} / j)$:

$$\mathrm{Re}(\hat{P}_k) = \pm \sin\left(\pi \cdot \frac{2k-1}{2n} \right) \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n} \cdot \mathrm{arsh}\left[\frac{1}{\varepsilon} \right] \right); \ \mathrm{Im}(\hat{P}_k) = \cos\left(\pi \cdot \frac{2k-1}{2n} \right) \cdot \mathrm{ch}\left(\frac{1}{n} \cdot \mathrm{arsh}\left[\frac{1}{\varepsilon} \right] \right). \tag{5}$$

Для полюсов квазиполосового фильтра $\hat{p}_k = \hat{\sigma}_k + j\hat{\omega}_k$, обозначая $A = (\hat{\omega}_b - \hat{\omega}_a)$, можно записать:

$$\mathrm{Re}(\hat{P}_k) + j\mathrm{Im}(\hat{P}_k) = -j \frac{(\hat{\sigma}_k + j\hat{\omega}_k)^2 + \hat{\omega}_{\text{o}}^2}{A}, \tag{6}$$

откуда после преобразований следует:

$$(\hat{\sigma}_k + j\hat{\omega}_k) = \sqrt{-[A \cdot \mathrm{Im}(\hat{P}_k) + \hat{\omega}_{\text{o}}^2] + jA \cdot \mathrm{Re}(\hat{P}_k)} = \sqrt{x + j \cdot y}.$$

Используя формулу Муавра, окончательно определяем полюса функции передачи

$$(\hat{\sigma}_k + j\hat{\omega}_k) = \sqrt{\rho} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi(k-1)}{2} \right) + j \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi(k-1)}{2} \right) \right], \tag{7}$$

где

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{[A \cdot \mathrm{Im}(\hat{P}_k) + \hat{\omega}_{\text{o}}^2]^2 + [A \cdot \mathrm{Re}(\hat{P}_k)]^2},$$

$$\varphi = \pi + \mathrm{arctg}\left[\frac{y}{x} \right]. \tag{8}$$

При расчете следует учесть неоднозначность определения угла φ: 1) если $x > 0$ (1-я и 4-я координатные четверти), то $\varphi = \mathrm{arctg}(y/x)$; 2) если $x < 0$, $y > 0$ (2-я координатная четверть), то $\varphi = \pi + \mathrm{arctg}(y/x)$; 3) если $x < 0$, $y < 0$ (3-я координатная четверть), то $\varphi = -\pi + \mathrm{arctg}(y/x)$.

Таким образом, (8) соответствует 2-й координатной четверти. Выражения, связывающие номинальный коэффициент передачи мощности K_p, коэффициент отражения $\Gamma_{\text{вых}}$ и нормированное выходное сопротивление цепи $\hat{Z}_{\text{вых}} = Z_{\text{вых}} / R_{\text{н}}$, имеют следующий вид:

$$K_p = 1 - |\Gamma_{\text{вых}}|^2, \ \Gamma_{\text{вых}} = (Z_{\text{вых}} - R_{\text{н}}) / (Z_{\text{вых}} + R_{\text{н}}) = (\hat{Z}_{\text{вых}} - 1) / (\hat{Z}_{\text{вых}} + 1), \tag{9}$$

откуда с учетом (1) и (2) следует:

$$|\Gamma_{\text{вых}}|^2 = 1 - K_p = \left[\varepsilon^2 \cdot T_n^2 \left(\Omega = \frac{|\hat{\omega}^2 - \hat{\omega}_{\text{o}}^2|}{\hat{\omega}_b - \hat{\omega}_a} \right) \right] \Bigg/ \left[1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2 \left(\Omega = \frac{|\hat{\omega}^2 - \hat{\omega}_{\text{o}}^2|}{\hat{\omega}_b - \hat{\omega}_a} \right) \right]. \tag{10}$$

Нули полинома числителя коэффициента отражения для фильтра-прототипа определяются нулями соответствующего многочлена Чебышева и рассчитываются в соответствии с выражением

$$\hat{Z}_k = \cos\left(\pi \cdot \frac{2k+1}{2n}\right), \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{11}$$

Нули будут чисто мнимыми и сопряженными $\hat{Z}_k = \pm j \operatorname{Im} \hat{Z}_k$. После применения подстановки (2) нули полинома числителя коэффициента отражения для квазиполосового фильтра в соответствии с (6) определяются выражением $j\hat{\omega}_{zk} = j\sqrt{A \cdot \operatorname{Im}(\hat{Z}_k) + \hat{\omega}_{\text{o}}^2}$.

Для составления полинома знаменателя коэффициента отражения используем из (5) полюсы, расположенные в левой полуплоскости (для $k = 2$). Для упрощения вначале формируем трехчлены из пар комплексно-сопряженных полюсов:

$$[p - (\operatorname{Re} p_k + j \operatorname{Im} p_k)] \cdot [p - (\operatorname{Re} p_k - j \operatorname{Im} p_k)] = [(p - \operatorname{Re} p_k) - j \operatorname{Im} p_k] \cdot [(p - \operatorname{Re} p_k) + j \operatorname{Im} p_k] =$$
$$= (p - \operatorname{Re} p_k)^2 + (\operatorname{Im} p_k)^2 = p^2 - 2p \cdot \operatorname{Re} p_k + \left[(\operatorname{Re} p_k)^2 + (\operatorname{Im} p_k)^2\right].$$

Аналогичным образом формируем полином числителя коэффициента отражения, предварительно сформировав соответствующие трехчлены:

$$[p - (\operatorname{Re} z_k + j \operatorname{Im} z_k)] \cdot [p - (\operatorname{Re} z_k - j \operatorname{Im} z_k)] = [(p - \operatorname{Re} z_k) - j \operatorname{Im} z_k] \cdot [(p - \operatorname{Re} z_k) + j \operatorname{Im} z_k] =$$
$$= (p - \operatorname{Re} z_k)^2 + (\operatorname{Im} z_k)^2 = p^2 - 2p \cdot \operatorname{Re} z_k + \left[(\operatorname{Re} z_k)^2 + (\operatorname{Im} z_k)^2\right].$$

В результате получаем для коэффициента отражения

$$\Gamma_{\text{вых}} = \frac{(\hat{p} - z_1)(\hat{p} - z_2) \cdot \ldots \cdot (\hat{p} - z_n)}{(\hat{p} - p_1)(\hat{p} - p_2) \cdot \ldots \cdot (\hat{p} - p_n)} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n/2} \left[p^2 - 2p \cdot \operatorname{Im} z_k + (\operatorname{Re} z_k)^2 + (\operatorname{Im} z_k)^2\right]}{\prod\limits_{k=1}^{n/2} \left[p^2 - 2p \cdot \operatorname{Re} p_k + (\operatorname{Re} p_k)^2 + (\operatorname{Im} p_k)^2\right]} =$$
$$= \frac{a_n \hat{p}^n + a_{n-1} \hat{p}^{n-1} + \ldots + a_1 \hat{p} + a_0}{b_n \hat{p}^n + b_{n-1} \hat{p}^{n-1} + \ldots + b_1 \hat{p} + b_0}. \tag{12}$$

Коэффициенты полиномов определяем по правилам перемножения многочленов в соответствии с выражением $a_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$; $k = 0, 1, 2, ..., (l + m)$, где l и m – степени перемножаемых полиномов, a и b – их коэффициенты.

В (12) значения старших коэффициентов полиномов равны единице, т. е. $a_n = 1$ и $b_n = 1$. На последнем этапе находим выражение для выходного сопротивления в соответствии с (9):

$$\hat{Z}_{\text{вых}} = \frac{\left(1 + \dfrac{\hat{p}^n + a_{n-1}\hat{p}^{n-1} + \ldots + a_1\hat{p} + a_0}{\hat{p}^n + b_{n-1}\hat{p}^{n-1} + \ldots + b_1\hat{p} + b_0}\right)}{\left(1 - \dfrac{\hat{p}^n + a_{n-1}\hat{p}^{n-1} + \ldots + a_1\hat{p} + a_0}{\hat{p}^n + b_{n-1}\hat{p}^{n-1} + \ldots + b_1\hat{p} + b_0}\right)} = \frac{2\hat{p}^n + \hat{p}^{n-1}(b_{n-1} + a_{n-1}) + \ldots + \hat{p}(b_1 + a_1) + (b_0 + a_0)}{\hat{p}^{n-1}(b_{n-1} - a_{n-1}) + \ldots + \hat{p}(b_1 - a_1) + (b_0 - a_0)}. \tag{13}$$

Реализация двухполюсников методом Кауэра производится путем представления операторной функции выходного сопротивления $\hat{Z}_{\text{вых}}(\hat{p})$ в виде цепной дроби вида

$$\hat{Z}_{\text{вых}}(\hat{p}) = g_1\hat{p} + \cfrac{1}{g_2\hat{p} + \ldots + \cfrac{1}{g_{n-1}\hat{p} + \cfrac{1}{g_n\hat{p} + g_{n+1}}}} = \hat{p}\hat{L}_1 + \cfrac{1}{\hat{p}\hat{C}_2 + \ldots + \cfrac{1}{\hat{p}\hat{L}_{2k-1} + \cfrac{1}{\hat{p}\hat{C}_{2k} + \cfrac{1}{r}}}}, \tag{14}$$

где g_n, $\hat{L}_1, \hat{L}_3, ..., \hat{L}_{2k-1}$ и $\hat{C}_2, \hat{C}_4, ..., \hat{C}_{2k}$ – нормированные значения индуктивностей катушек и емкостей конденсаторов для $k = 1, ..., n/2$: $\hat{L}_{2k-1} = g_{2k-1}$, $\hat{C}_{2k} = g_{2k}$.

Окончательный расчет параметров элементов цепи производится путем денормирования с учетом реальных значений сопротивления нагрузки $R_н$ и нормирующей частоты фильтра-прототипа $f_{норм}$:

$$L_{2k-1} = g_{2k-1} \cdot \frac{R_н}{2\pi f_{норм}}; \; C_{2k} = g_{2k} \cdot \frac{1}{2\pi f_{норм} R_н}. \qquad (15)$$

Формулы (1)−(15) представляют собой математическую модель для решения задачи синтеза ФНЧ с помощью компьютерной программы.

Анализ результатов расчета с помощью стандартной математики

Использование процесса разложения функции входного сопротивления в виде непрерывной дроби приводит к постепенной потере точности в процессе разложения. Причина в том, что при использовании чисел с плавающей запятой в формате *double* длина мантиссы составляет 52 двоичных разряда, что соответствует 16-ти верным цифрам мантиссы после десятичной запятой. Наибольшие погрешности вызывает вычитание соизмеримых чисел. Последняя цифра, как правило, не является точной. В табл. 2 представлены результаты расчета параметров g_n фильтра 20-го порядка для $w = 0{,}3$ и $r = R_н/R_с = 5$ в зависимости от числа знаков в мантиссе переменной с плавающей запятой. Достоверными считаются знаки, повторяющиеся во всех мантиссах различной длины и выделенные жирным шрифтом.

Таблица 2. Значения нормированных параметров лестничной структуры $n = 20$
Table 2. Values of the normalized parameters of the ladder structure $n = 20$

g_n	Длина мантиссы m, знаков Mantissa length m, characters				
	18	**16**	**14**	**12**	**10**
g_1	**0,2954195543744352**	**0,2954195543744**352	**0,2954195543744**4	**0,295419554374**	**0,295419554**4
g_2	**0,713461109564948**	**0,7134611095649**473	**0,71346110956**499	**0,713461109**561	**0,713461109**8
g_3	**1,0058241561838035**	**1,005824156183**7966	**1,00582415618**413	**1,00582415**6152	**1,00582415**81
g_4	**1,0778527135007734**	**1,077852713500**736	**1,07785271350**291	**1,077852713**286	**1,0778527**266
g5	**1,3444551271939031**	**1,344455127193**6078	**1,34445512**721384	**1,34445512**5133	**1,344455**2542
g_6	**1,1116842558930766**	**1,111684255891**377	**1,11168425**601542	**1,11168424**3014	**1,11168**50547
g_7	**1,7143743392518236**	**1,7143743392**240474	**1,7143743**4115213	**1,714374**137835	**1,7143**868615
g_8	**0,9418886559187652**	**0,94188865**57877248	**0,9418886**6449494	**0,94188**7744902	**0,941**9453415
g_9	**2,3632836433824114**	**2,3632836**39323256	**2,363283**90591041	**2,3632**55746937	**2,36**50210613
g_{10}	**0,686285986518519**	**0,686285976**7247607	**0,6862**8661828577	**0,6862**18857231	**0,6**904969103
g_{11}	**3,43143008776028**	**3,4314**29449037259	**3,4314**7128394913	**3,4**27058873063	**3**,7323116007
g_{12}	**0,4726569204179655**	**0,472656**1909475649	**0,472**70397320746	**0,4**67724626061	2,4216582208
g_{13}	**4,709466618031227**	**4,709**377926992177	**4,7**1519519287878	**4**,183521806709	−0,0157276474
g_{14}	**0,342888872823455**	**0,3428**356584472274	**0,34**636667160111	0,19113105171	−1,8857040979
g_{15}	**5,560720624648062**	**5,5**519951966932135	6,20632346322519	1,869831540234	5,4401419765
g_{16}	**0,269723387652699**	**0,26**6596319236514	92,8313518646038	0,219631316503	0,3362139249
g_{17}	**5,5117714667155475**	**5**,082558302126313	−0,00000492164538	5,527060239925	5,8435977804
g_{18}	**0,22648594961061003**	0,1610284249850325	−92,50550539104933	0,270098171961	0,272047304
g_{19}	**5,54123352930229**	2,776428788285468	6,44373312115062	5,803602803799	5,8088384512
g_{20}	**0,032916230753412865**	0,1015547775683366	0,19975360242714	0,196154248425	0,196187588

Как видно из табл. 2, одна итерация увеличивает число ненадежных знаков примерно на одну единицу. В результате для 16 знаков мантиссы (стандартная компьютерная математика) синтез структуры с $n = 20$ оказывается невозможным. Левая колонка табл. 2 (для $m = 18$), начиная с g_{16} и далее, скорее всего, содержит ошибочные цифры. Свойство антиметричности лестничной структуры, при котором для нечетных элементов выполняется соотношение $g_{n+1-k} = g_k / r$, а для четных − $g_{n+1-k} = g_k r$, позволяет оценить точность разложения входного сопротивления в цепную дробь. Из табл. 2 для $n = 18$ следует, что $g_{20} = g_1/5 = 0{,}2954195543744352/5 = 0{,}05908391087488704$, $g_{19} = g_2 \cdot 5 = 0{,}713461109564948 \cdot 5 = 3{,}56730554782474$, что не совпадает с полученными в результате разложения значениями $g_{20} = 0{,}032916230753412865$ и $g_{19} = 5{,}54123352930229$. О потере точности расчетов говорит и появление в процессе разложения коэффициентов с отрицательными значениями (например: g_{13}, g_{14} для $m = 10$; g_{17}, g_{18} для $m = 14$).

Таким образом, синтез лестничных структур высокого порядка методами Кауэра ограничен спецификой компьютерного представления данных. Преодолеть ограничения позволяет программное обеспечение, реализующее математические операции над переменными с произвольной длиной мантиссы − математику произвольной или многократной точности (multiple precision). К нему относятся библиотеки GNU Multiple Precision Arithmetic Library (GMP), BCMath (Mathematical Binary Calculator) и BigNumber, где числа представляются в виде переменных строкового типа. Над ними осуществляются арифметические операции по школьным правилам «в столбик». Было решено остановиться на библиотеке BigNumber для JavaScript. Следует отметить, что все библиотеки не предусматривают расчеты тригонометрических, гиперболических и логарифмических функций. В разработанной программе реализации этих функций основаны на вычислении рядов Маклорена, включая расчет таких констант, как π, e, ln 10, ln 2 и т. д.

Анализ результатов расчета для арифметики произвольной точности

В табл. 3 представлены результаты расчета значений g_n в зависимости от числа знаков в мантиссе для отношения согласуемых сопротивлений $r = 5$ в нормированной полосе 0,3. Достоверные знаки выделены жирным шрифтом. Значения нормированных параметров для $m = 35$ сравнивались с результатами для $m = 45$.

Таблица 3. Значения нормированных параметров лестничной структуры $n = 20$
Table 3. Values of the normalized parameters of the ladder structure $n = 20$

g_n	Число знаков мантиссы, m / The number of mantissa characters, m		
	35	25	20
g_1	**0,29541955437443521234270754113**370597	**0,2954195543744352124**083667	**0,2954195543744**1918125
g_2	**0,71346110956494770514221366391**859639	**0,713461109564947705**232662	**0,71346110956492**562165
g_3	**1,00582415618379906860783798845**944071	**1,0058241561837990687**468833	**1,0058241561837**6512004
g_4	**1,07785271350076178568663714200**750203	**1,0778527135007617857**002412	**1,0778527135007**5846525
g_5	**1,34445512719388538671280141702**242219	**1,3444551271938853869**693529	**1,3444551271938**227563
g_6	**1,11168425589288948820596037242**747494	**1,1116842558928894888**0257848	**1,1116842558929**3352591
g_7	**1,71437433924616586808365116126**544162	**1,7143743392461658687**912393	**1,714374339245**99381954
g_8	**0,94188865588618165813373786619**549812	**0,941888655886181657**6579313	**0,94188865588630**104095
g_9	**2,36328364232728559753138888157**461324	**2,3632836423272855992**086425	**2,3632836423269**7440206
g_{10}	**0,68628598394432447400787491979**955783	**0,68628598394432447**26151504	**0,6862859839449**0111828
g_{11}	**3,43142991972162246337327736**981691306	**3,43142991972162242**14887443	**3,4314299197**4727706806
g_{12}	**0,47265672846545710665015125**692951756	**0,4726567284654570**527166397	**0,4726567284**9624487801
g_{13}	**4,70944327943090841876418474**018773942	**4,709443279430901**9577735978	**4,7094432**8315065456257
g_{14}	**0,34287486784923316429063186**125006768	**0,3428748678492**2928144490132	**0,3428748**7008270803596
g_{15}	**5,55842127946444759221709**26162725545	**5,5584212794638**105226958762	**5,558421**64595773737713
g_{16}	**0,26889102543877707002874**336014120063	**0,26889102543854**72780322545	**0,268891**15763191673432
g_{17}	**5,389263567503809075011**18635766229738	**5,38926356747**08735888869745	**5,3892**8251451168597175
g_{18}	**0,201164831236759808248**44619535676139	**0,2011648312309**020996803515	**0,20116**820111059881736
g_{19}	**3,5673055478247386226**7980868539358304	**3,5673055475**861367207881386	**3,567**44282237718140891
g_{20}	**0,0590839108748870408**6303198313051947	**0,05908391088**09784763816973	**0,05908**04065438504839

Согласно свойству антиметричности лестничной структуры $g_{20} = g_1/5$ = 0,29541955437443521234270754113370597/5 = 0,0590839108748870424685415082266, $g_{19} = g_2 \cdot 5$ = 0,71346110956494770514221366391859639·5 = 3,56730554782473852571106831959, что совпадает с полученными в результате разложения данными табл. 3 до 15-го знака. Экспериментальным путем установлено, что для получения не менее 15 достоверных цифр после десятичной запятой для параметров фильтра g_n необходимо увеличить длину мантиссы переменных до значения $2n$. Для фильтра 60-го порядка потребовалась длина мантиссы переменной g_n 120 знаков. Расчеты производились на компьютере с двухъядерным процессором Intel(R) Core(TM) i3−2100 CPU @3.10GHz, ОЗУ 3,41 ГБ и 32-разрядной операционной системой Windows XP Professional. С увеличением порядка фильтра продолжительность расчета возрастает практически в геометрической прогрессии. Продолжительность расчета фильтра 60-го порядка при 800 точках на графиках составила до 10 минут, а расчет фильтра 20-го порядка занял 60 секунд. При 200 точках на графиках время расчета для $n = 20$ и $n = 60$ составило 20 секунд и 3 минуты соответственно.

Заключение

Рассмотрены особенности синтеза лестничных трансформирующих ФНЧ высокого порядка по методу Кауэра с частотной характеристикой Чебышева. Разработана JavaScript программа, позволяющая производить оценку результатов синтеза и расчета элементов. Показано, что для получения достоверных результатов число знаков в мантиссе переменных не может быть меньше порядка лестничной цепи. Для повышения точности расчетов рекомендуется применение арифметики произвольной или многократной точности.

Список литературы

1. Matthaei G.L. Tables of Chebyshev Impedance Transforming Networks of Low-Pass Filter Form. *Proceedings of the IEEE*. 1964;52:939-63.
2. Zhu Y.S., Chen W.K. *Computer Aided Design Of Communication Networks.* Singapore: World Scientific; 2000.
3. Богачев В.М. *Синтез цепей связи для широкополосных усилителей*. Москва: МЭИ; 1980.

References

1. Matthaei G.L. Tables of Chebyshev Impedance Transforming Networks of Low-Pass Filter Form. *Proceedings of the IEEE*. 1964; 52:939-63.
2. Zhu Y.S., Chen W.K. *Computer Aided Design Of Communication Networks.* Singapore: World Scientific; 2000.
3. Bogachev V.M. [*Synthesis of communication circuits for broadband amplifiers*]. Moscow: MPEI; 1980. (In Russ.)

Сведения об авторе

Курочкин А.Е., к.т.н., доцент, доцент кафедры информационных радиотехнологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Information about the author

Kurochkin A.E., PhD, Associate Professor, Associate Professor of Information Radioengineering Department of Belarussian State University of Informatics and Radioelectronics.

Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,
г. Минск, ул. П. Бровки, д. 6,
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
тел. +375-29-667-75-68;
e-mail: kurochkin@bsuir.by
Курочкин Александр Евдокимович

Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,
Minsk, P. Brovka st., 6,
Belarussian State University
of Informatics and Radioelectronics
tel. +375-29-667-75-68;
e-mail: kurochkin@bsuir.by
Kurochkin Alexander Evdokimovich