УДК 518.517(944)947

О ПРИМЕНЕНИИ «АНТИВЯЗКОСТИ» ДЛЯ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Ю.П. КРУПНОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 12 января 2012

Предложен эффективный метод нахождения численного решения задачи, описывающей процесс движения несжимаемой жидкости.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, разностная схема, аппроксимационная вязкость, разрывное решение.

В работе [1] предлагается для численного решения задачи Баклея-Леверетта

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial F(u)}{\partial x}=0,\ F_u\geq 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &u\,(x,\,0)=u_0(x),\ \ x>0,\\ &u\,(0,\,t)=u^0(t) \end{aligned} \tag{2}$$

по схеме с «антивязкостью»

$$u_i^{n+1}=u_i^n+\frac{\tau}{h}\left[F_{i-1}^n-F_i^n-\frac{1}{2}\left(R_{i+1}^n-R_i^n\right)\right], \tag{3}$$

$$R_i^n=V\left(1-\frac{\tau}{h}\left((F_u)_{i-1}^n+(F_u)_i^n\right)\right)\left(F_i^n-F_{i-1}^n\right). \tag{4}$$

Параметр V брать зависящим от числа Куранта $\frac{\tau}{h}\max F_u$. Там же рассмотрен случай линейной зависимости параметра от числа Куранта.

В данной работе изучается случай, когда имеет место квадратичная зависимость параметра от числа Куранта. Применение квадратичной зависимости позволяет улучшить результаты расчетов с любыми числами Куранта, находящимися в промежутке $(0,1]$. В замечании к работе указывается вид «антивязкости», дающий улучшение результатов и в случае постоянного параметра.

Рассмотрим разностную схему (3), (4). Считаем, что в (4)

$$\begin{aligned} &V=a_0+a_1K_0+a_2K_0^2,\\ &\quad K_0=\frac{\tau}{h}\max F_u. \end{aligned} \tag{5}$$

Для устойчивости схемы (3) – (5) необходимо выполнение условий

$K_0 \le 1,$
$0 \le V \le 1.$

Определим значения коэффициентов a_0, a_1, a_2 в выражении (5). Коэффициенты a_0, a_1, a_2 должны обеспечивать монотонное убывание V при $K_0 \in (0, 1]$, а также удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &= 0{,}15, \\ a_0 + 0{,}1\, a_1 + 0{,}01\, a_2 &= 0{,}6. \end{aligned} \tag{6}$$

Имеет место следующая

Теорема. Если a_0 удовлетворяет условию

$$\frac{133}{220} \le a_0 \le 0{,}705, \tag{7}$$

выполняется система уравнений (6), то функция, задаваемая формулой (5), монотонно убывает при $K_0 \in (0, 1]$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$V' = a_1 + 2a_2 K_0 < 0. \tag{8}$$

Из (6) не трудно получить

$$\begin{aligned} a_1 &= -11a_0 + 6{,}65, \\ a_2 &= 10a_0 - 6{,}5. \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим три возможных случая:

а) $\frac{133}{220} \le a_0 < 0{,}65$; *б*) $a_0 = 0{,}65$; *в*) $0{,}65 < a_0 \le 0{,}705$.

В случае *а*), учитывая (9) имеем $a_1 + 2a_2K_0 < a_1 \le 0$.

В случае *б*) условие (8) очевидно.

Осталось рассмотреть случай *в*).

Учитывая (9), имеем

$$a_1 + 2a_2K_0 \le a_1 + 2a_2 = 9a_0 - 6{,}35 < 0.$$

Следовательно, условие (8) выполняется и в случае *в*).

Теорема доказана.

Если $K_0 \in (0,05; 1]$, то неравенство (7) можно заменить следующим

$$0{,}6 \le a_0 \le 0{,}705. \tag{7'}$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично приведенному выше.

Не трудно видеть, что параметр V, задаваемый формулой (5) при выполнении (6), (7) ((7')) и $K_0 \in (0, 1]$ ($K_0 \in (0{,}05; 1]$), удовлетворяет неравенству $0{,}15 \le V < 0{,}705$.

Проведенные численные расчеты показали, что лучшие результаты получаются для минимальных значений a_0, удовлетворяющих неравенству (7) или (7').

Следовательно, для $K_0 \in (0, 1]$ в (5) нужно положить

$$a_0 = \frac{133}{220},\ a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{5}{11}. \tag{10}$$

Если $K_0 \in (0,05;1]$, то

$$a_0 = 0,6,\ a_1 = 0,05,\ a_2 = -0,5. \tag{11}$$

Результаты расчетов по схеме (3) – (5), (11) и схеме [1] $a_0 = 0{,}6,\ a_1 = -0{,}4,\ a_2 = 0$ для случая

$F(u) = 5u^2 / ((1-u)^2 + 5u^2),\ u_0(x) = 0,\ u^0(t) = 1$

в моменты времени $t = 0{,}25,\ \ 0{,}5$ приведены на рис. 1.

Замечание. Определим в разностной схеме (3) R_i^n следующим образом:

$$R_i^n = V\left(1 - \frac{\tau}{h}\left(E\,(F_u)_{i-1}^n + (1-E)(F_u)_i^n\right)\right)\left(F_i^n - F_{i-1}^n\right), \tag{12}$$

где

$0 \le E \le 1,$

$0 < V \le 1,\ V = \mathrm{const}.$

Если $E = 0,5$, то имеем обычно применяемый вид «антивязкости» [2].

Результаты численных исследований показали, что при проведении расчетов по схеме (3), (12), с различными числами Куранта, для $V = \mathrm{const}$ лучшие значения получаются, когда $E = 1,\ V = 0{,}4$.

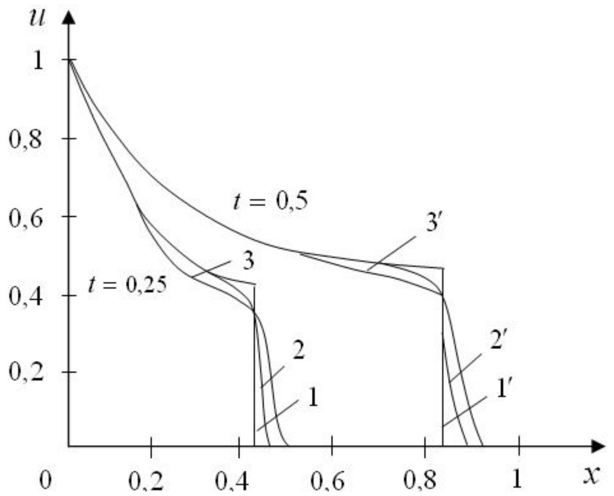

Рис. 1. Сравнение численных решений: 1, 1' – эталонные решения;
2, 2' – результаты расчетов по схеме (3) – (5), (11), когда $\tau = 0{,}05,\ h = 0{,}025,\ K_0 = 0,5$;
3, 3' – результаты расчетов по схеме [1], когда $\tau = 0{,}05,\ R = 0,025,\ K_0 = 0,5$

ON THE APPLICATION OF «ANTIVIASKOST’» FOR THE DIFFERENCE SCHEME OF FIRST ORDER

YU.P. KRUPNOV

Abstract

The set of difference schemes for the one-dimentional Backley-Leverett problem is considered.

Список литературы

1. *Крупнов Ю.П.* // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1985. №1. С. 122.
2. *Леви Б.И. и др.* // ВЦ СО АН СССР. 1975. С. 170–183.