

УДК 518.517(944)947

ПРИМЕНЕНИЕ ДИВЕРГЕНТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЗАДАЧИ БАКЛЕЯ-ЛЕВЕРЕТТА

Ю.П. КРУПНОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 23 ноября 2012

Построено семейство разностных схем на минимальном шаблоне узлов для нахождения разрывного решения задачи Баклея–Леверетта.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, разностная схема, разрывное решение.

В работе рассматривается семейство явных дивергентных разностных схем с параметрами, построенное на минимальном шаблоне узлов, для численного решения одномерной задачи Баклея–Леверетта. Исследуются границы изменения значений параметров, позволяющие находить разрывное решение с хорошей точностью. В отличие от работ [1], [2], в данном семействе разностных схем не используются значения производной, а также не привлекаются дополнительные расчетные узлы.

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0, F_u \geq 0, \quad (1)$$

где $F(u)$ – функция Леверетта с начальным и граничным условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \geq 0, \\ u(0, t) &= u^0(t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

в области $\Omega = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq T\}$.

На разностной сетке $\omega_{h\tau} = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots; t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N = [T/\tau]\}$ предлагаемое семейство разностных схем для задачи (1), (2) записывается в виде

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n + \frac{\tau}{h} p \left[F(\beta u_{i-1}^n + (1-\beta)u_i^n) - F(\beta' u_{i-1}^n + (1-\beta')u_i^n) \right], \\ 0 \leq \beta, \beta' \leq 1, \beta &\neq \beta'. \end{aligned} \quad (3)$$

Условие аппроксимации семейством (3) уравнения (1) следующее:

$$p(\beta - \beta') = 1. \quad (4)$$

Для определенности, можно всегда считать, что $\beta > \beta'$. Нетрудно показать, что схемы (3), (4) удовлетворяют принципу максимума при выполнении условия

$$K_0 \leq 1, \quad (5)$$

где $K_0 = \frac{\tau}{h} \max F_u$.

Первые дифференциальные приближения разностных схем (3), (4) имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial F(u)}{\partial x} + \frac{1}{2} h \left(F_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a F_{uu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right),$$

где $a = \beta + \beta'$.

Для получения хороших значений по разностным схемам (3), (4), необходимо чтобы выполнялось $0,8 \leq a \leq 1$, $a - \varepsilon \leq \beta \leq a$, $0 < \varepsilon < 0,1$.

Лучшие результаты для одних и тех же значений a получаются, когда $\beta' = 0$. В этом случае разностные схемы (3), (4) имеют следующий вид

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\tau}{\beta h} \left[F(\beta u_{i-1}^n + (1-\beta)u_i^n) - F_i^n \right]. \quad (6)$$

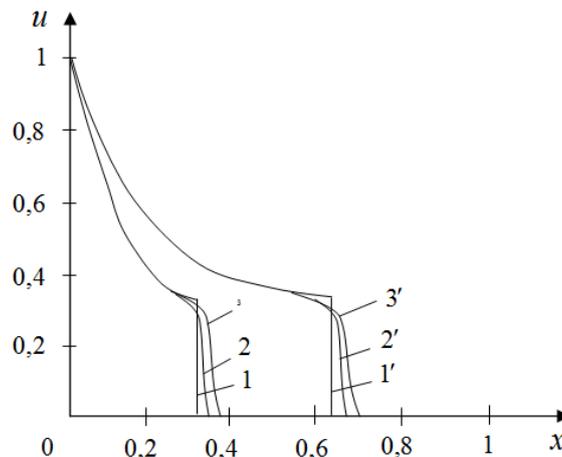
Отметим, что если в (6) положить $\beta = 1$, то имеем известную схему «уголок».

Результаты численных экспериментов позволили выделить из (6) класс наилучших схем. Наилучшие схемы получаются при β , удовлетворяющим следующему условию

$$0,925 \leq \beta \leq 0,975. \quad (7)$$

Следовательно, схема «уголок» ($\beta = 1$) не входит в класс наилучших схем (6), (7).

На рисунке приведены результаты расчетов по разностным схемам вида (6), когда $\beta = 0,95$ и $\beta = 1$ для случая $F(u) = 10u^2 / ((1-u)^2 + 10u^2)$, $u_0(x) = 0$, $u^0(t) = 1$ в моменты времени $t = 0,15$; $0,3$.



Результаты расчетов по схеме (6): 1, 1' – эталонные решения;
2, 2' – численные решения, когда $\beta = 0,95$, $\tau = 0,0033$, $h = 0,0125$, $K_o = 0,8$;
3, 3' – численные решения, когда $\beta = 1$, $\tau = 0,0033$, $h = 0,0125$, $K_o = 0,8$

Замечание. Если применять разностные схемы вида

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\tau}{h} \left[b_0 F_i^n + b_1 F(\beta u_{i-1}^n + (1-\beta)u_i^n) + b_2 F_{i-1}^n \right], \quad (8)$$

$$0 \leq \beta \leq 1, \quad b_0 < 0, \quad b_2 > 0,$$

где b_1, β удовлетворяют условиям необходимым для аппроксимации

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 + b_2 &= 0, \\ b_2 + b_1 \beta &= 1, \end{aligned} \quad (9)$$

то приемлемые результаты получаются при выполнении условий

$$\begin{aligned}
&1 + b_1\beta(\beta - 1) = a_1, \\
&(a_1 - \varepsilon < \beta < a_1, \quad 0,95 \leq a_1 \leq 1) \cup (a_1 < \beta < a_1 + \varepsilon, \quad 0,9 \leq a_1 \leq 0,95), \\
&0 \leq \varepsilon \leq 0,05.
\end{aligned}
\tag{10}$$

Отметим, что при $\beta = a_1$, получаем схемы (6), поэтому в (10) β берется большим или меньшим, чем a_1 . При выполнении условия (5), разностные схемы (8), (9) также удовлетворяют принципу максимума. По сравнению со схемами (6), (7) результаты расчетов по схемам (8)–(10) почти не улучшаются.

DIVERGENT SCHEMES FOR BACKLEY-LEVERETT PROBLEM APPLICATION

Yu. P. KRUPNOV

Abstract

The set of difference schemes for the one-dimensional Backley–Leverett problem is considered.

Список литературы

1. *Крупнов Ю.П.* // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. 1981. №2. С. 127–129.
2. *Крупнов Ю.П.* // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. 1985. №1. С. 122.