УДК 619.85

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ПОЛУЧЕНИИ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

С.В. ЧЕБАКОВ, Л.В. СЕРЕБРЯНАЯ

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси
Сурганова, 6, 220006, Минск, Беларусь

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П.Бровки, 6, 220013, Минск, Беларусь

Поступила в редакцию 15 октября 2012

Рассмотрена многокритериальная задача нахождения паретовских альтернатив при динамическом наборе начальных данных. Представлена общая схема построения частичных решений в случае, когда каждый из элементов формируется по определенному вычислительному алгоритму. Введены понятия доминирующих и доминируемых векторов на паретовском множестве и предложен алгоритм их построения. Разработана схема формирования частичных решений без непосредственного сравнения альтернатив.

Ключевые слова: множество Парето, частичное решение, доминируемая и доминирующая альтернативы, критериальная граница.

Введение

В традиционных постановках оптимизационных комбинаторных задач на конечном множестве альтернативных вариантов все множество начальных данных обычно задано перед началом решения задачи. Однако подобное предположение не всегда является верным. Элементы множества начальных данных могут формироваться по определенным вычислительным алгоритмам, и их построение может потребовать существенных временных затрат. Предположим, имеется возможность организации параллельных вычислений при решении рассматриваемой комбинаторной задачи. В этом случае возможно одновременное выполнение двух не связанных между собой процессов: формирования множества начальных данных и нахождения частичных решений на множестве построенных альтернатив. Для минимизации времени решения задачи требуется разработать оптимизационные алгоритмы формирования частичных решений, что и является целью данной работы.

Рассмотрим классическую многокритериальную задачу нахождения множества Парето на конечном множестве альтернативных вариантов [1].

Определение 1. Частичным решением оптимизационной задачи нахождения множества Парето назовем паретовское множество на некотором подмножестве всего набора начальных данных.

Пусть имеется частичное решение P_m, где m – число альтернатив T, сформированных на определенный момент времени, а также построена новая альтернатива T_{m+1}. Требуется сформировать частичное решение P_{m+1}. Очевидно, что множество Парето на всем наборе альтернатив может быть получено после того, как построена последняя возможная альтернатива и найдено соответствующее частичное решение.

Одним из вопросов, возникающих при построении паретовского множества P_{m+1}, является нахождение максимально точных оценок множества P_m с точки зрения разрешения следующих двух ситуаций:

– определение условий доминируемости альтернативы T_{m+1} альтернативами уже существующего частичного решения P_m;

– определение условий доминируемости альтернативой T_{m+1} элементов частичного решения P_m.

Наличие этих характеристик множества P_m в виде некоторых векторов в заданном критериальном пространстве дает возможность оптимизировать построение частичного решения P_{m+1}. Для нахождения названных оценок в работе вводятся определения доминирующих и доминируемых векторов паретовского множества P_m относительно альтернативы T_{m+1} и предлагается способ их построения.

Схема построения частичных решений

Пусть требуется определить частичное решение P_{m+1} на подмножестве начальных данных, включающих в себя все ранее построенные альтернативы и новую альтернативу T_{m+1}. Предположим, что отношение предпочтения между отдельными альтернативами в заданном критериальном пространстве транзитивно. В работе [2] показано, что частичное решение P_{m+1} на новом множестве начальных данных представляет собой множество Парето на подмножестве начальных данных, включающем в себя все альтернативы частичного решения P_m и альтернативу T_{m+1}. Иными словами, все начальные альтернативы, исключенные ранее из рассмотрения при построении частичных решений P_m, $m=\overline{1,J}$, не могут входить и в паретовское множество P_{m+1}. Отметим, что такое соотношение справедливо не для всех оптимизационных комбинаторных задач [2]. Таким образом, для построения нового частичного решения P_{m+1} достаточно определить отношение новой альтернативы T_{m+1} только с элементами частичного решения P_m. Элементы любого паретовского множества, исходя из его определения, не могут быть упорядочены между собой по отношению доминируемости в заданном критериальном пространстве. Следовательно, для нахождения отношения доминируемости между альтернативой T_{m+1} и элементами частичного решения P_m требуется провести операции последовательного сравнения координат альтернативы T_{m+1} с координатами всех элементов множества P_m.

Утверждение 1. Если альтернатива T_{m+1} доминируется хотя бы одной альтернативой из паретовского множества P_m, то она не может доминировать никакую альтернативу из P_m.

Доказательство. Справедливость утверждения следует из определения паретовского множества и понятия доминируемости альтернатив в заданном критериальном пространстве. Предположим, что требуемое условие не выполняется, т. е. существует альтернатива H из паретовского множества P_m, которую доминирует альтернатива T_{m+1}. По условию в множестве P_m существует некоторая альтернатива K, доминирующая альтернативу T_{m+1}. Тогда, по транзитивности отношения предпочтения альтернатива K должна доминировать альтернативу H из того же множества P_m, что противоречит определению паретовского множества. Следовательно, предположение о доминировании альтернативой T_{m+1} некоторого элемента из P_m неверно.

Утверждение 2. Если альтернатива T_{m+1} доминирует хотя бы одну альтернативу из паретовского множества P_m, то она не может доминироваться никакой альтернативой из P_m.

Доказательство. Предположим, что существует альтернатива O из множества P_m, доминирующая альтернативу T_{m+1}. По условию T_{m+1} доминирует альтернативу из P_m, и отношение предпочтения транзитивно. Тогда должна существовать хотя бы одна альтернатива из P_m, которую доминирует альтернатива O, что противоречит тому факту, что P_m является паретовским множеством.

Таким образом, альтернатива T_{m+1} может быть либо только доминируемой, либо только доминирующей по отношению к элементам паретовского множества P_m.

Общая схема формирования частичного решения P_{m+1} может быть представлена следующим образом. Если альтернатива T_{m+1} находится в отношении Парето со всеми альтернативами частичного решения P_m, то $P_{m+1}=P_m$. Если альтернатива T_{m+1} доминируема хотя бы одной альтернативой частичного решения P_m, то вследствие *утверждения* 1 дальнейшие сравнения с оставшимися альтернативами этого множества не имеют смысла и $P_{m+1}=P_m$. Если альтернатива T_{m+1} доминирует хотя бы одну альтернативу паретовского множества P_m, то требуется найти все альтернативы из P_m, которые доминируются альтернативой T_{m+1}, и исключить их из дальнейшего рассмотрения. Частичное решение P_{m+1} в этом случае включает в себя все оставшиеся альтернативы множества P_m и вследствие *утверждения* 2 альтернативу T_{m+1}.

Определение 2. Верхней критериальной границей частичного решения P_m назовем вектор L^+, чьи координаты представляют собой максимум по каждой координате на всем множестве P_m. Нижней критериальной границей множества P_m назовем вектор L^-, чьи координаты представляют собой минимум по каждой координате на множестве P_m.

Из способа построения векторов L^+ и L^- получаем, что L^+ доминирует любую альтернативу множества P_m, а вектор L^- доминируется каждой альтернативой из P_m. Из транзитивности отношения предпочтения следует, что вектор L^+ доминирует вектор L^- . Кроме того, по определению множества Парето вектора L^+ и L^- не могут совпадать ни с одной альтернативой множества P_m при условии, что множество P_m включает в себя более одного элемента.

Определение 3. Вектор C назовем доминирующим вектором на паретовском множестве P_m, а вектор B – доминируемым вектором на множестве P_m по отношению к альтернативе T_{m+1}, если выполняются следующие условия:

1) все координаты векторов C и B в заданном критериальном пространстве одновременно являются координатами некоторых векторов множества P_m;

2) вектора C и B не совпадают ни с одной альтернативой паретовского множества P_m;

3) из доминируемости вектором C альтернативы T_{m+1} следует, что T_{m+1} доминируема хотя бы одной альтернативой паретовского множества P_m;

4) из доминируемости вектора B альтернативой T_{m+1} следует, что T_{m+1} доминирует хотя бы одну альтернативу паретовского множества P_m.

Очевидно, что при транзитивности отношения предпочтения нижняя L^- и верхняя L^+ критериальные границы паретовского множества P_m *по определению 3* являются доминирующими и доминируемыми векторами по отношению к альтернативе T_{m+1}. При этом в соответствии с *утверждениями 1 и 2* для нахождения отношения доминируемости между альтернативой T_{m+1} и элементами паретовского множества P_m достаточно, чтобы существовала хотя бы одна альтернатива частичного решения P_m, которая либо доминировала альтернативу T_{m+1}, либо T_{m+1} доминировала хотя бы одну альтернативу из этого же множества.

Предположим, что вектора L^+ и L^- могут быть не единственными векторами, отвечающими *определению 3*. Для повышения эффективности процесса построения частичного решения P_{m+1} требуется, чтобы сформированные по некоторому алгоритму доминирующие вектора на множестве P_m, сохраняя все свои свойства по *определению 3*, максимально доминировали нижнюю критериальную границу L^- множества P_m. Это позволяет, не проводя непосредственных сравнений с элементами множества P_m, исключить из рассмотрения значительно больше альтернатив, как построенных, так и находящихся на некоторой стадии процесса их формирования, чем при использовании в операциях сравнения только вектора L^-. Аналогичным образом для более эффективного нахождения хотя бы одной альтернативы множества P_m, которая доминируется альтернативой T_{m+1}, доминируемые вектора на множестве P_m должны в максимальной степени уступать верхней критериальной границе L^+ , что позволяет более эффективно определить тип отношения T_{m+1} к альтернативам множества P_m.

Алгоритм построения последовательности упорядоченных векторов

Рассмотрим частичное паретовское множество P_m.

1. Определяются верхняя L^+_{m1} и нижняя L^-_{m1} критериальные границы множества P_m.

2. Из множества P_m выделяются те элементы, которые содержат хотя бы одну координату, входящую в вектор L^+_{m1} или в вектор L^-_{m1}. Это подмножество обозначено как Z^*_{m1}.

3. Множество P^*_{m1} определено следующим образом: $P^*_{m1} = P_m \setminus Z^*_{m1}$. Очевидно, что P^*_{m1} представляет собой паретовское множество.

4. Строятся вектора L^+_{m2} и L^-_{m2}, координаты которых представляют собой максимальные и минимальные значения соответствующих координат элементов множества P^*_{m1}. Если все критериальные оценки альтернатив множества P_m не равны между собой, то, исходя из способа их построения, вектор L^-_{m2} доминирует вектор L^-_{m1}, а вектор L^+_{m2} доминируется вектором L^+_{m1}.

5. Из множества P_{m1}^{*} исключаются элементы, имеющие хотя бы одну координату, входящую в вектора L_{m2}^{+} и L_{m2}^{-}. Определяются верхняя L_{m3}^{+} и нижняя L_{m3}^{-} критериальные границы множества $P_{m2}^{*} = P_{m1}^{*} \setminus Z_{m2}^{*}$. Процесс построения векторов L_{mj}^{+} и L_{mj}^{-} продолжается до тех пор, пока не будут исчерпаны все элементы множества P_m.

Из приведенного алгоритма построения множеств P_{mj}^{*} следует:

$$P_{mj}^{*} = \bigcup_{k=j+1}^{l} Z_{mk}^{*},\ \overline{j=0,l-1},\ P_{m0}^{*} = P_m, \tag{1}$$

где l − число построенных подмножеств Z_{mj}^{*}. Вектора L_{mj}^{+} и L_{mj}^{-} связаны соотношениями:

$$L_{m1}^{+} > L_{m2}^{+} > L_{m3}^{+} > \ldots > L_{ml}^{+}, \quad L_{m1}^{-} < L_{m2}^{-} < L_{m3}^{-} < \ldots < L_{ml}^{-}, \tag{2}$$

где «>«− символ доминирования.

Поскольку ранее было показано, что любой вектор L_{mj}^{+} доминирует соответствующий ему вектор L_{mj}^{-}, то справедливо соотношение:

$$L_{m1}^{+} > L_{m2}^{+} > L_{m3}^{+} > \ldots > L_{ml}^{+} \quad > L_{ml}^{-} > L_{ml-1}^{-} > L_{ml-2}^{-} > \ldots > L_{m1}^{-}. \tag{3}$$

Предположим, что число элементов множества P_m больше 1. Вектора L_{mj+1}^{+} и L_{mj+1}^{-} не могут совпадать ни с одной альтернативой паретовского множества P_{mj}^{*} . Данное разбиение паретовского множества представляет собой отображение F, чья область определения состоит из элементов множества P_m, а область значений – набор подмножеств Z_{mj}^{*}, $j = \overline{1,l}$ со следующими правилами формирования:

– каждый элемент P_m принадлежит только одному Z_{mj}^{*};

– объединение всех элементов подмножеств Z_{mj}^{*} совпадает с множеством P_m;

– хотя бы одна координата каждого элемента, входящего в подмножество Z_{m1}^{*}, принадлежит верхней или нижней критериальной границе всего паретовского множества P_m, и одна из координат элементов, входящих в подмножества Z_{mj}^{*}, $j = \overline{2,l}$ обязательно принадлежит верхней или нижней критериальной границе подмножеств $P_{mj-1}^{*} = P_{mj-2} \setminus Z_{mj-1}^{*}$, $P_{m0}^{*} = P_m$.

Следовательно, координаты любого элемента подмножеств Z_{mj}^{*} могут принадлежать одному из векторов L_{mj}^{+} или L_{mj}^{-}, либо одновременно обоим векторам, либо ни одному из этих векторов.

Определение 4. Вектора L_{mj}^{+} и L_{mj}^{-} назовем симметричными элементам образующего их подмножества Z_{mj}^{*}, если каждый элемент из Z_{mj}^{*} содержит хотя бы одну координату, входящую как в вектор L_{mj}^{+}, так и в вектор L_{mj}^{-}.

Отображение F назовем симметричным, если все вектора L_{mj}^{+} и L_{mj}^{-} являются симметричными. Для критериального пространства произвольной размерности свойство симметричности не является заранее известным фактом.

Очевидно, что, исходя из описанного выше алгоритма разбиения частичного паретовского множества P_m, все вектора L_{mj}^{-}, являясь нижними критериальными границами соответствующих подмножеств, вследствие транзитивности отношения предпочтения отвечают всем условиям *определения* 3. В соответствии с соотношением (2) вектор L_{mj}^{-} является максимальным доминирующим вектором по отношению к альтернативе T_{m+1}. Этот вектор будет использован для определения возможной доминируемости новой построенной альтернативы T_{m+1} элементами множества P_m. Аналогичным образом вектор L_{ml}^{+} является минимальным доминируемым, в соответствие с *определением 3*, среди векторов L^+_{mj} по отношению к альтернативе T_{m+1}. Следовательно, для того, чтобы альтернатива T_{m+1} являлась доминирующей по отношению ко всем элементам паретовского множества P_m, достаточно, чтобы она доминировала вектор L^+_{ml}.

Частичное решение P_m в виде (1) также можно использовать, когда построение альтернативных вариантов представляет собой многошаговый процесс с возможностью предварительной оценки некоторых шагов. В этом случае удается определить ситуацию, когда дальнейшее построение альтернатив становится ненужным, т.к. в некоторый момент времени уже существует их доминируемость вектором L^-_{ml} или, наоборот, выясняется, что альтернатива уже является доминирующей и необходимо ее построение. Кроме того, соотношения (1) и (2) могут быть применены, когда все множество альтернативных вариантов полностью задается перед началом решения задачи. Требуется лишь упорядочить некоторым образом все элементы множества начальных данных и последовательно их рассматривать для построения отдельных частичных решений в соответствии с заданным упорядочиванием.

Заключение

Введено понятие доминирующего и доминируемого вектора на заданном паретовском множестве P_m по отношению к некоторой внешней альтернативе T_{m+1} и предложен алгоритм их построения. Представление паретовского множества в виде (1) дает возможность определения типа отношения новой альтернативы T_{m+1} с элементами частичного решения P_m без ее непосредственного сравнения с элементами P_m. Это позволяет разработать алгоритм формирования нового частичного решения P_{m+1}, минимизирующий общее число требуемых попарных сравнений альтернативы T_{m+1} с элементами множества P_m, а также в определенных случаях полностью исключить непосредственное сравнение T_{m+1} с элементами P_m.

Предложенный способ построения паретовских множеств может быть использован для решения классической комбинаторной задачи о ранце [3, 4], различные модификации которой широко применяются на практике в прикладной математике, криптографии, экономике, логистике, для нахождения решения оптимальной загрузки различных транспортных средств. Одним из возможных методов ее решения является построение паретовских слоев в заданном двухкритериальном пространстве [5].

METHOD OF CONSTRUCTION OF PARETO SET AT A DYNAMIC INITIAL DATA RECEPTION

S.V. CHEBAKOV, L.V. SEREBRYANAYA

Abstract

The many-criterial task of pareto alternatives finding at a dynamic set of initial data is considered. The general scheme of construction of partial solutions in a case when each element is formed on certain computing algorithm is presented. Concepts of dominating and dominated vectors on pareto set are defined and the algorithm of their construction is offered. The scheme of formation of partial solutions without direct comparison of alternatives is developed.

Список литературы

1. *Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н.* Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М., 1986.
2. *Чебаков С.В.* // Вести НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2009. № 3. С. 105–113.
3. *Сэвидж Дж. Э.* Сложность вычислений. М., 1998.
4. *Kellerer H., Pfershy U., Pisinger D.* Knapsack Problems. Springer Verlag, 2004.
5. *Чебаков С.В.* // Вести НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2005. № 2. С. 112–119.