

УДК 517.977

ОСЛАБЛЕННОЕ УСЛОВИЕ РЕГУЛЯРНОСТИ МАНГАСАРЯНА-ФРОМОВИЦА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

С.В. АКТАНОРОВИЧ, С.А. БОГДАНОВ, А.Е. ЛЕЩЕВ, Л.И. МИНЧЕНКО

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь*

Поступила в редакцию 9 ноября 2012

Условия регулярности играют важную роль в задачах математического программирования поскольку гарантируют выполнение необходимых условий оптимальности Куна-Таккера и построение на их основе двойственных алгоритмов для вычисления оптимальных решений. В то же время условия регулярности различаются между собой общностью, сравнительной простотой проверки и условиями применения. Наряду с классическими условиями регулярности (в первую очередь это известное условие Мангасаряна-Фромовица), в последнее время вызывают значительный интерес более слабые условия регулярности, применимые в задачах, для которых не имеют места классические условия. Целью данной работы является исследование ослабленного условия регулярности Мангасаряна-Фромовица и его связи с другими условиями регулярности.

Ключевые слова: математическое программирование, оптимальность, условия регулярности, ослабленные условия.

Введение

Пусть h_i $i = 1, \dots, p$ – непрерывно дифференцируемые функции из \mathbf{R}^m в \mathbf{R} . Введем непустое множество допустимых точек

$$C = \left\{ y \in \mathbf{R}^m \mid h_i(y) \leq 0 \quad i \in I, \quad h_i(y) = 0 \quad i \in I_0 \right\},$$

где $I = \{ 1, \dots, s \}$, $I_0 = \{ s+1, \dots, p \}$ или $I_0 = \emptyset$,

и рассмотрим задачу (P) минимизации непрерывно дифференцируемой целевой функции $f(y)$ на множестве C .

Пусть $I(y) = \{ i \in I \mid h_i(y) = 0 \}$ – множество индексов, активных в точке $y \in C$ ограничений-неравенств. Для задачи (P) определим в точке $y \in C$ множество множителей Лагранжа:

$$\Lambda(y) = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^p \mid \nabla f(y) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y) = 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad i \in I(y), \quad \lambda_i = 0 \quad i \in I \setminus I(y) \right\}$$

и множество

$$\Gamma_C(y) = \left\{ \bar{y} \in \mathbf{R}^m \mid \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \leq 0 \quad i \in I(y), \quad \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0 \right\},$$

которое будем называть линеаризованным касательным конусом к множеству C в точке $y \in C$. Известно, что широко применяемое условие регулярности Мангасаряна-Фромовица (MFCQ) [1] требует, чтобы в точке $y \in C$ система векторов $\nabla h_i(y)$ $i \in I_0$ была линейно независимой и существовал вектор \bar{y}_0 такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle = 0$, $i \in I_0, \dots \dots \langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle < 0$, $i \in I(y)$.

В литературе известны условия регулярности, независимые от MFCQ. Наиболее известные из них условия постоянного ранга CRCQ Р. Жанена [2] и ослабленное условие посто-

янного ранга RCRCQ [3,4] (более простое для проверки и одновременно более общее, чем CRCQ).

Говорят, что множество C удовлетворяет в точке $y_0 \in C$ ослабленному условию постоянного ранга (RCRCQ), если для любого множества индексов $J = K \cup I_0$, где $K \subset I(y_0)$, система векторов $\{\nabla h_i(y), i \in J\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y_0 .

Существует также ряд прямых обобщений MFCQ (условия псевдонормальности и квазинормальности [5], условие R -регулярности [3,4,6-9]), условие CPLD [10,11] обобщает одновременно MFCQ и CRCQ. Наконец, в недавно опубликованной работе [12] предложено условие RCPLD, обобщающее MFCQ и RCRCQ. Взаимосвязи различных условий регулярности посвящены работы [13–15].

В статье [16] было введено ослабленное условие регулярности Мангасаряна-Фромовица, ослабляющее и RCRCQ, и целый ряд других условий регулярности, включая классическое условие Мангасаряна-Фромовица. Несколько позже в работе [17] было предложено достаточно общее условие регулярности CRSC. В данной заметке показывается, что CRSC не является новым условием регулярности, а представляет собой другую форму записи ослабленного условия регулярности Мангасаряна-Фромовица. Дополнительно доказывается, что утверждение [17] о том, что выполнение условия CRSC влечет выполнение условия R -регулярности (часто именуемого в литературе «error bound property»), справедливо при менее жестких предположениях об ограничениях задачи, чем в [17].

Ослабленное условие регулярности Мангасаряна-Фромовица

Пусть $y \in C$. Представим множество индексов $I(y)$ активных ограничений в виде $I(y) = I^a(y) \cup I^-(y)$, где $I^a(y) = \{i \in I(y) \mid \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0 \ \forall \bar{y} \in \Gamma_C(y)\}$, $I^-(y) = I(y) \setminus I^a(y)$.

Определение 1 [13]. Говорят, что в точке $y \in C$ выполняется ослабленное условие регулярности Мангасаряна-Фромовица, если система векторов $\{\nabla h_i \mid i \in I_0 \cup I^a(y)\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности этой точки и существует вектор \bar{y}_0 такой, что

$$\langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I^a(y), \quad \langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle < 0 \quad i \in I^-(y).$$

Лемма 1. Пусть $y \in C$. Следующие утверждения равносильны:

а) система векторов $\{\nabla h_i \mid i \in I_0 \cup I^a(y)\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y и существует вектор \bar{y}_0 такой, что

$$\langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I^a(y), \quad \langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle < 0 \quad i \in I^-(y);$$

б) система векторов $\{\nabla h_i \mid i \in I_0 \cup I^a(y)\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y .

Доказательство. Очевидно, что из утверждения (а) вытекает утверждение (б).

Обратно, пусть выполнено (б). Тогда система векторов $\{\nabla h_i \mid i \in I_0 \cup I^a(y)\}$ имеет постоянный ранг в окрестности точки y и первое условие утверждения (а) выполнено. Проверим выполнение второго условия из утверждения (а). В случае, если $I^-(y) = \emptyset$, оно будет выполнено тривиально. Пусть $I^-(y) \neq \emptyset$. Возьмем любой индекс $i \in I^-(y)$. Тогда $\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \leq 0$ для всех $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$, но индекс $i \notin I^a(y)$, то есть найдется вектор $\bar{y}^i \in \Gamma_C(y)$ такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^i \rangle < 0$. Построим вектор $\bar{y}^0 = \sum t_k \bar{y}^k$, где все $t_k > 0$. Тогда $\bar{y}^0 \in \Gamma_C(y)$ и для любого $i \in I^-(y)$ получим

$$\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^0 \rangle = \sum_{k \in I^+} t_k \langle \nabla h_i(y), \bar{y}^k \rangle = \sum_{k \in I^+ \setminus i} t_k \langle \nabla h_i(y), \bar{y}^k \rangle + t_i \langle \nabla h_i(y), \bar{y}^i \rangle < 0.$$

Следовательно, и в этом случае второе условие из утверждения (а) выполнено.

Таким образом, определению условия RMFCQ можно придать следующий вид.

Определение 2. Будем говорить, что в точке $y \in C$ выполнено условие регулярности RMFCQ, если система векторов $\{\nabla h_i \mid i \in I_0 \cup I^a(y)\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности этой точки.

Под таким определением в работе [3] введено условие регулярности, коротко называемое CRSC. Лемма 1 показывает, что условие CRSC является другой формой записи условия RMFCQ.

Условие RMFCQ очевидно выполняется при выполнении условия ослабленного постоянного ранга RCRCQ (а, следовательно, и CRCQ). Частным случаем условия RMFCQ являются условие регулярности Мангасаряна-Фромовица (MFCQ), а также его легкая модификация (обозначим ее EMFCQ), которая сводится к требованиям:

- 1) система векторов $\{\nabla h_i \mid i \in I_0\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y ;
- 2) существует вектор \bar{y}_0 такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle = 0 \mid i \in I_0$, $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}_0 \rangle < 0 \mid i \in I(y)$.

Из результатов [3] следует, что ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица является также более слабым условием регулярности по сравнению с условиями CPLD и RCPLD [1, 2].

Следуя [12], будем называть условие регулярности в точке $y \in C$ хорошо обусловленным, если из его выполнения в точке y следует выполнение в любой точке из некоторой окрестности y .

Следующее важное утверждение доказано в [3] (лемма 5.3).

Утверждение 1. Пусть в точке $y_0 \in C$ выполнено условие RMFCQ. Тогда существует окрестность $V(y_0)$ точки y_0 такая, что $I^a(y) = I^a(y_0)$ для всех $y \in C \cap V(y_0)$.

Непосредственно из данного утверждения вытекает

Следствие 1. Условие RMFCQ является хорошо обусловленным в любой точке, в которой оно выполняется.

Ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица и R -регулярность

Пусть $|y|$ – евклидова норма вектора y , $d(x, C) = \inf\{|x - y| \mid y \in C\}$. При исследовании задач оптимизации важную роль играет следующее условие, являющееся само по себе достаточно общим условием регулярности и связывающее расстояние до множества C с точностью выполнения ограничений задачи.

Будем говорить, что в точке $y_0 \in C$ выполняется условие R -регулярности (имеет место «error bound property»), если найдутся число $\alpha > 0$ и окрестность $V(y_0)$ точки y_0 такие, что $d(y, C) \leq \alpha \max\{0, h_i(y) \mid i \in I, |h_i(y)| \mid i \in I_0\}$ для всех $y \in V(y_0)$.

В [3] при дополнительном условии дважды дифференцируемости функций h_i , $i = 1, \dots, p$ доказано, что из выполнения в точке $y_0 \in C$ условия CRSC (то есть RMFCQ) следует наличие условия R -регулярности в этой точке. Используя утверждения, доказанные в [3], и двойственное описание R -регулярности, полученное в [11], можно улучшить данный результат.

Пусть $v \in \mathbf{R}^m$, $v \notin C$. Обозначим $\Pi_C(v)$ множество точек из C ближайших к точке v . Очевидно, эти точки являются решениями задачи нелинейного программирования $f_v(y) \rightarrow \min$, $y \in C$, где $f_v(y) = |y - v|$.

Отметим, что функция $f_v(y)$ дифференцируема по y во всех точках, отличных от $y = v$.

Пусть $\text{fr } C$ – граница множества C ,

$$\Lambda_v(y) = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^p \mid \nabla f_v(y) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y) = 0, \lambda_i \geq 0 \mid i \in I(y), \lambda_i = 0 \mid i \in I \setminus I(y) \right\},$$

$$*\Lambda_v^M(y) = \left\{ \lambda \in \Lambda_v(y) \mid \sum_{i=1}^p |\lambda_i| \leq M \right\}.$$

Лемма 2 ([11]). Пусть градиенты $\nabla h_i(y)$ локально липшицевы в окрестности точки $y_0 \in \text{fr } C$ и существуют число $M > 0$ и окрестность $V(y_0)$ точки y_0 такие, что при всех $v \in V(y_0)$, не лежащих в C , справедливо условие $\Lambda_v^M(y) \neq \emptyset$ для любой точки $y = y(v) \in \Pi_C(v)$. Тогда в точке y_0 выполняется условие R -регулярности.

Теорема 1. Пусть градиенты $\nabla h_i(i)$ локально липшицевы в окрестности точки $y_0 \in C$, в которой выполняется условие RMFCQ. Тогда в этой точке выполняется условие R -регулярности.

Доказательство. Отметим вначале, что при $y_0 \in \text{int } C$ для всех y из некоторой окрестности y_0 справедливо равенство $\rho(y, C) = 0$ и, следовательно, имеет место R -регулярность.

Пусть $y_0 \in \text{fr } C$. Будем рассуждать от противного и предположим, что множество C не удовлетворяет условию R -регулярности. Тогда в силу леммы 2 и следствия 1 для любой последовательности $v_k \rightarrow y_0$ такой, что $v_k \notin C$, расстояние $d(0, \Lambda_{v_k}(y_k)) \rightarrow \infty$ для $y_k = y(v_k) \in \Pi_C(v_k)$. При этом $y_k = y(v_k) \rightarrow y_0$, поскольку $|v_k - y_k| \leq |v_k - y_0|$. Не ограничивая общности, можно считать, что $I(y_k) = I^*$, где I^* не зависит от y_k . Тогда

$$\Lambda_{v_k}(y_k) \neq \emptyset, \dots, h_i(y_k) = 0 \quad i \in I_0 \cup I^*, \quad h_i(y_k) < 0 \quad i \notin (I_0 \cup I^*), \quad \text{где } k = 1, 2, \dots$$

Отсюда $h_i(y_k) = 0 \quad i \in I^*$, $h_i(y_k) = 0 \quad i \in (I^*)$. Поскольку в силу утверждения 1, не ограничивая общности, можно считать, что $I^a(y_k) = I^a(y_0)$ и не зависит от $k = 1, 2, \dots$, то положим $I^a(y_k) = I^a(y_0) = I^a \subset I^*$. Отметим, что для любого y_k существует $i \in (I_0 \cup I^*)$, для которого $\nabla h_i(y_k) \neq 0$, иначе из определения $\Lambda_{v_k}(y_k)$ следовало бы $\nabla f_{v_k}(y_k) = 0$, что невозможно. В системе $\{\nabla h_i(y_0) \quad i \in I_0\}$ (если $I_0 \neq \emptyset$ и существует индекс $i \in I_0$, для которого $\nabla h_i(y_0) \neq 0$) выберем максимальную линейно независимую подсистему $\{\nabla h_i(y_0) \quad i \in I_{00}\}$, где $I_{00} \subset I_0$, и дополним ее до максимальной линейно-независимой подсистемы $\{\nabla h_i(y_0) \quad i \in I_{00} \cup I^{a0}\}$ в системе $\{\nabla h_i(y_0) \quad i \in I_0 \cup I^a\}$, где $I^{a0} \subset I^a$. В силу RMFCQ можно, не ограничивая общности, считать, что система векторов $\{\nabla h_i(y_k) \quad i \in I_{00} \cup I^a\}$ будет максимальной линейно-независимой подсистемой в системе $\{\nabla h_i(y_k) \quad i \in I_0 \cup I^a\}$. Также не ограничивая общности, можно дополнить систему векторов $\{\nabla h_i(y_k) \quad i \in I_{00} \cup I^{a0}\}$ до $\{\nabla h_i(y_k) \quad i \in I_{00} \cup I^{a0} \cup I^{-0}\}$, где $I^{-0} \subset (I^* \setminus I^a)$, которая будет максимальной линейно-независимой подсистемой в системе векторов $\{\nabla h_i(y_k) \quad i \in I_0 \cup I^*\}$.

Тогда найдется вектор $\lambda^k \in \Lambda_{v_k}(y_k)$ такой, что $\lambda^k \rightarrow \infty$ и

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i^k \nabla h_i(y_k) + \nabla f_{v_k}(y_k) = 0, \quad \lambda_i^k \geq 0 \quad i \in I, \quad \lambda_i^k \geq 0 \quad i \notin (I_{00} \cup I^{a0} \cup I^{-0}). \quad (1)$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что $\lambda^k |\lambda^k|^{-1} \rightarrow \lambda$. Тогда, поскольку $\lambda^k \in \Lambda_{v_k}(y_k)$ и $\lambda^k \rightarrow \infty$, из (1) следует

$$\sum_{i \in I_{00} \cup I^{a0}} \lambda_i \nabla h_i(y_0) + \sum_{i \in I^{-0}} \lambda_i \nabla h_i(y_0) = 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad i \in I^{a0} \cup I^{-0}, \quad (2)$$

где $|\lambda| = 1$ и $\lambda_i = 0$ для $i \notin (I_{00} \cup I^{a0} \cup I^{-0})$.

Покажем, что $\lambda_i = 0$ также для всех $i \in I^{-0}$. Действительно, допустим противное: найдется $\lambda_i > 0$ при $i \in I^{-0}$. Тогда в силу леммы 1 существует вектор \bar{y}_0 такой, что

$$\langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}_0 \rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I^a(y_0), \quad \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}_0 \rangle < 0 \quad i \in I^{-0}(y_0),$$

и, следовательно, из равенства (2) следует

$$\sum_{i \in I_{00} \cup I^{a0}} \lambda_i \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}_0 \rangle + \sum_{i \in I^{-0}} \lambda_i \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}_0 \rangle = 0,$$

откуда

$$\sum_{i \in I^{-0}} \lambda_i \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}_0 \rangle = 0,$$

что невозможно.

Таким образом, все $\lambda_i = 0$ для $i \in I^{-0}$ и равенство (2) принимает вид:

$$\sum_{i \in I_{00} \cup I^{a0}} \lambda \nabla h_i(y_0) = 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad i \in I^{a0},$$

где среди множителей λ_i есть ненулевые. Последнее противоречит линейной независимости системы векторов $\{ \nabla h_i(y_0) \mid i \in I_{00} \cup I^{a0} \}$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы.

Заключение

В статье показано, что введенные недавно Андреани, Хезером, Швердт и Силва условие регулярности CRSC не является новым и представляет собой другую форму записи ослабленного условия регулярности Мангасаряна-Фромовица, опубликованного в 2010 году Л.И. Минченко и С.М. Стаховским. Дополнительно доказывается, что ослабленное условие регулярности Мангасаряна-Фромовица обеспечивает R -регулярность задачи оптимизации при нежестких дополнительных предположениях об ограничениях.

RELAXED MANGASARIAN-FROMOVITZ CONSTRAINT QUALIFICATION AND ITS APPLICATIONS

S.V. AKTANAROVICH, S.A. BOGDANOV, A.E. LESCHOV, L.I. MINCHENKO

Abstract

Nonlinear programming problems are considered under the relaxed Mangasarian-Fromovitz constraint qualification. It was established that a new constraint qualification CRSC is another form of relaxed Mangasarian-Fromovitz constraint qualification and proved that the relaxed Mangasarian-Fromovitz constraint qualification implies the local error bound property under not essential additional assumptions.

Список литературы

1. Mangasarian, O.L., Fromovitz, S. // *Mathematical Analysis and Appl.* 1967. №17. P. 37–47.
2. Janin R. // *Mathematical Programming Study.* 1984. № 21. P. 110–126.
3. Minchenko L., Stakhovski S. // *Optimization.* 2011. № 60 (4). P. 429–440.
4. Minchenko L., Stakhovski S. // *SIAM Journal on Optimization.* 2011. № 21 (1). P. 314–332.
5. Bertsekas D.P. *Convex analysis and optimization.* Athens, 2003.
6. Федоров В.В. *Численные методы максимина.* М., 1979.
7. Ioffe A.D. Regular points of Lipschitz functions. // *Transactions of American Mathematical Society.*
8. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. *Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations.* Dordrecht/Boston/London, 2002.
9. Minchenko L., Tarakanov A. // *Optimization Theory and Appl.* 2011. № 148. P. 571–579.
10. Andreani R., Martinez J.M., Schverdt M.L. // *Optimization Theory and Appl.* 2005. №125. P.473–485.
11. Qi L., Wei A. // *SIAM Journal on Optimization.* 2000. № 10 (4). P. 963–981.
12. Andreani R., Haeser G., Schuverdt M.L., et. al. // *Mathematical Programming, Ser. A* 135. 2012. P. 255–273.
13. Shu Lu. // *Mathematical Programming.* 2009. №126 (2). P. 365–392.
14. Shu Lu. Relation between the constant rank and the relaxed constant rank constraint qualifications // *Optimization*, 2010. DOI:10.1080/02331934.2010.527972.
15. Solodov M.V. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, chapter Constraint Qualifications. NJ, USA, 2011.
16. Минченко Л.И., Стаховский С.М. // *Докл. БГУИР.* 2010. №8. С. 104–109.
17. R.Andreani, G. Haeser, M.L.Schuverdt, et. al. Two new weak constraint qualifications and applications // *Optimization Online Preprint*, 2011-07-3105.