http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2019-124-6-72-79

Оригинальная статья
Original paper

УДК 519.87

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПОДМНОЖЕСТВА В ЗАДАЧЕ О РАНЦЕ

ЧЕБАКОВ С.В.[1], СЕРЕБРЯНАЯ Л.В.[2]

[1]*Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Республика Беларусь*
[2]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Республика Беларусь*

Поступила в редакцию 25 февраля 2019

Аннотация. Рассматривается алгоритм решения задачи о ранце на основе предлагаемой многокритериальной модели. Реализация алгоритма позволяет определить структуру оптимального подмножества в виде объединения определенных элементов группы паретовских слоев, на которые разбивается множество начальных данных. Первым таким слоем является множество Парето. Определение структуры оптимального подмножества позволяет найти такое подмножество начальных данных, элементы которого не могут войти в оптимальное подмножество. Наиболее трудоемкими являются задачи о ранце с большим набором начальных данных. В статье показано, что при небольшом значении объема ранца число элементов, требуемых для нахождения оптимального подмножества, значительно меньше их общего числа в исходном множестве, что может привести к существенному уменьшению общего времени решения комбинаторной задачи.

Ключевые слова: задача о ранце, многокритериальная модель, множество Парето, оптимальное подмножество, паретовские слои.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования. Чебаков С.В., Серебряная Л.В. Определение структуры оптимального подмножества в задаче о ранце. Доклады БГУИР. 2019; 6(124): 72-79.

FINDING OF OPTIMAL SUBSET STRUCTURE IN THE KNAPSACK PROBLEM

CHEBAKOV S.V.[1], SEREBRYANAYA L.V.[2]

[1]*United Institute of Informatics Problems of NAS of Belarus, Republic of Belarus*
[2]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Republic of Belarus*

Submitted 25 February 2019

Abstract. An algorithm for solving the knapsack problem based on the proposed multi-criteria model is considered. The implementation of this algorithm allows to define the structure of the optimal subset as a union of certain elements of a Pareto layers group into which a initial data set is divided. The first such layer is the Pareto set. The optimal subset allows to find a specific subset of the initial data. Its elements as a result of belonging to the Pareto layers with large numbers cannot enter the optimal subset. The most expensive in terms of the number of operations required are knapsack problems, in which the number of elements in the set of initial data is quite large. The article shows that with a relatively small value of the knapsack volume, the number of elements required to find the optimal subset is significantly less than their total number in the original set. It can lead to a significant decrease in the total time to solve the combinatorial problem.

Keywords: the knapsack problem, two-critarial optimization, Pareto subset, optimal subset, pareto layers.

Conflict of interests. The authors declare no conflict of interests.

For citation. Chebakov S.V., Serebryanaya L.V. Finding of optimal subset structure in the knapsack problem. Doklady BGUIR. 2019; 6(124): 72-79.

Введение

Задача о ранце относится к классическим задачам дискретной оптимизации. Она получила широкое применение в различных прикладных областях: планировании и управлении производственными процессами, логистике, криптографии и др. Многие из перечисленных задач относятся к классу комбинаторных, математические модели для которых создаются на основе задачи о ранце. В работе представлен метод решения оптимизационной задачи, которая формулируется следующим образом. Пусть альтернативному варианту достижения цели n_i из множества начальных данных N соответствуют две характеристики – время достижения цели t_i и вероятность ее достижения w_i. Суммарное время достижения цели при последовательном выполнении альтернативных вариантов из множества N ограничено величиной T, время выполнения каждого варианта меньше либо равно T. При достижении заданной цели хотя бы одним элементом из N решение задачи считается найденным. Рассматриваемая задача представляет собой задачу поиска при ограничениях на ресурсы [1]. В задачах поиска, как правило, считается, что цель обязательно должна быть достигнута одним из альтернативных вариантов, т. е. сумма вероятностей всех вариантов из заданного начального множества N равна единице. Допустимым будет такое подмножество вариантов из N, чье суммарное время выполнения не превосходит величину T. Среди допустимых подмножеств требуется найти оптимальное подмножество Q с максимальной суммарной вероятностью достижения цели. Пусть число элементов в множестве N равно r. Тогда математическую модель для ее решения можно представить следующим образом: $f(x)=\sum_{i=1}^{r} w_i x_i \to \max, \sum_{i=1}^{r} t_i x_i$, $x_i \in \{0, 1\}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $w_i > 0$, $0 < t_i \le T$, $i = 1, \ldots, r$. Модель показывает, что рассматриваемая задача представляет собой оптимизационную задачу о ранце с множеством объектов N и заданным объемом ранца T [2]. Методы ее решения представлены, например, в [2, 3] и основаны на различных способах перебора элементов множества начальных данных. В работе [4] между любой парой элементов из N введено двухкритериальное транзитивное отношение предпочтения. Доминирующим является элемент, имеющий меньшее время выполнения и большую вероятность достижения цели.

В статье разработан метод решения задачи о ранце с заданным множеством начальных данных N. Введение транзитивного двухкритериального пространства предпочтений на конечном множестве и разработка на этой основе алгоритма формирования допустимых подмножеств позволили определить структуру оптимального допустимого подмножества. Оно представляет собой объединение некоторых подмножеств первых паретовских слоев, на которые разбивается множество начальных данных в введенном двухкритериальном пространстве. Для построения паретовских слоев в таких пространствах не требуется применять алгоритмы перебора с элементами начального множества. Представленный способ решения задачи о ранце позволяет рассматривать при построении допустимых подмножеств только элементы определенного количества первых слоев, число которых может быть существенно меньше их общего количества. Это значительно сокращает число операций, требуемых для нахождения решения оптимизационной задачи.

Построение допустимого подмножества в задаче о ранце

Пусть введено предложенное двухкритериальное транзитивное отношение предпочтения между элементами начального множества N и требуется сформировать допустимое подмножество D. Будем последовательно включать в него элементы начального множества до тех пор, пока суммарное время их выполнения не превысит заданную величину T. Предположим, на множестве N нет двух элементов с совпадающими значениями хотя бы одной координаты. Пусть определены первые элементы g_1, g_2, …, $g_к$ допустимого подмножества D. На каждом шаге после включения очередного элемента g_i требуется найти значение ресурса времени, соответствующее следующему шагу, в виде $T_i+1 = T_i - 1 + t_i$, где t_i – время выполнения элемента g_i. Будем считать, что каждый элемент может войти в формируемое допустимое подмножество только один раз.

Утверждение 1. Предположим, на каждом шаге формирования допустимого подмножества D множество начальных данных N можно представить в виде объединения двух подмножеств A_i *и* B_i. Подмножество B_i содержит в себе элементы из N, которые не могут на последующих шагах войти в D, а подмножество A_i содержит все остальные элементы множества N. Тогда на каждом шаге выбор очередного элемента g_i подмножества D осуществляется только из паретовских элементов множества A_i.

Доказательство. Пусть $У_i$ – множество паретовских элементов на A_i. По предположению, любой элемент множества начальных данных N может включаться в подмножество D только один раз. Тогда подмножество B_i должно включать в себя все уже входящие в D элементы g_1, g_2, …, g_{i-1}. Кроме того, подмножество B_i содержит также элементы, время выполнения которых будет больше текущего и всех последующих значений ресурса времени T_i. Очевидно, для каждого элемента из A_i, не входящего в Y_i, в последнем существует хотя бы один элемент доминирующий его.

Рассмотрим два способа построения допустимого подмножества D. Первый способ заключается в том, что на каждом шаге в D включается доминируемый на множестве A_i элемент d_i. Во втором способе в D включается доминирующий его элемент f_i из Y_i.

По предположению, множество N не содержит двух элементов с совпадающими значениями хотя бы одной координаты. Тогда все неравенства, выражающие отношения доминируемости между элементами по каждому из двух критериев, являются строгими, и элемент f_i имеет меньшее время выполнения и большую вероятность достижения цели, чем элемент d_i. Следовательно, значения ресурса времени T_i при втором способе формирования допустимого подмножества D будут меньше, чем при первом способе. Процесс построения двух допустимых подмножеств продолжается до тех пор, пока не исчерпан весь первоначальный ресурс времени T. При втором способе построения подмножества D ресурс времени T не может исчерпаться ранее, чем при его построении первым способом, а суммарная вероятность в ходе реализации второго способа построения окажется больше. Таким образом, для любого допустимого подмножества, сформированного только из доминируемых элементов на множестве A_i, существует допустимое подмножество, имеющее большую суммарную вероятность. Аналогичным образом такой же результат получается, если включение доминируемых элементов происходит только на некоторых шагах формирования подмножества D. Решение рассматриваемой задачи о ранце представляет собой подмножество с максимальной суммарной вероятностью достижения цели. Следовательно, построение допустимых подмножеств, включающих в себя элементы, не входящие в паретовское множество Y_j, не имеет смысла для нахождения оптимального подмножества Q. Утверждение доказано.

Таким образом, для нахождения допустимого подмножества D требуется разработать алгоритм построения множеств B_i и Y_i. Построение множества Y_i опирается на определение паретовского слоя. Множество Парето включает в себя все недоминируемые элементы и является первым паретовским слоем. Паретовский слой с номером m представляет собой совокупность паретовских элементов на той части множества начальных данных, которая остается после удаления элементов, принадлежащих всем предыдущим паретовским слоям. Следовательно, для каждого элемента, входящего во второй и последующие паретовские слои, существует хотя бы один элемент из предыдущего слоя, который его доминирует. Отметим, что элемент слоя с номером m может либо доминироваться любым элементом предыдущего слоя m–1, либо находиться с ним в отношении Парето. Исходя из алгоритма построения, разбиение на паретовские слои множества начальных данных N представляет собой определенное упорядочивание его элементов по отношению доминирования, что и позволяет формировать подмножества Y_i.

Элементы множества Парето в двухкритериальном пространстве отвечают следующему факту из теории многокритериальной оптимизации [5]. Если элементы множества Парето упорядочить по возрастанию значения по предпочтению одного из критериев, то по второму критерию эти же элементы будут следовать друг за другом уже в порядке убывания их предпочтения. Следовательно, для построения множества Парето и любого паретовского слоя в двухкритериальном пространстве достаточно использовать алгоритмы поиска в упорядоченных структурах данных. Таким образом, для их построения не применяются алгоритмы перебора элементов начального множества N.

Определение 1. Верхней критериальной границей некоторого паретовского слоя P_m является вектор L_m^+, чьи координаты представляют собой максимум по предпочтению в каждой координате среди всех элементов, образующих этот паретовский слой.

Определение 2. Нижней критериальной границей паретовского слоя P_m является вектор L_m^-, чьи координаты представляют собой минимум по предпочтению в каждой координате среди всех элементов данного паретовского слоя.

Из способа построения векторов L_m^+, L_m^- следует, что вектор L_m^+ доминирует все альтернативы паретовского слоя P_m, а вектор L_m^- доминируется каждым его элементом.

Утверждение 2. Верхняя критериальная граница любого паретовского слоя P_i доминирует верхние критериальные границы всех последующих слоев $P_{i+1}, P_{i+2}, ..., P_v$.

Доказательство. Пусть P_i и P_{i+1} представляют собой соседние паретовские слои, а векторы L_i^+ и L_{i+1}^+ – их верхние критериальные границы. Покажем, что вектор L_i^+ доминирует вектор L_{i+1}^+. Предположим противное, что эти два вектора либо находятся между собой в отношении Парето, либо L_{i+1}^+ доминирует L_i^+. Тогда по определению верхних критериальных границ существует элемент в слое P_{i+1}, который хотя бы по одной координате доминирует все элементы предыдущего слоя P_i. Это противоречит тому факту, что для каждого элемента из P_{i+1} в предыдущем слое P_i существует хотя бы один доминирующий элемент. Из транзитивности введенного отношения предпочтения следует, что вектор L_i^+ доминирует вектор L_{i+2}^+, доминирующий вектор L_{i+3}^+. Тогда L_i^+ доминирует и вектор L_{i+3}^+ Аналогичным образом можно доказать, что вектор L_i^+ доминирует верхние критериальные оценки L_{i+4}^+, …., L_v^+ всех последующих паретовских слоев. Утверждение доказано.

Таким образом, на первом шаге построения допустимого подмножества D множество Y_1 совпадает с множеством Парето на всем множестве начальных данных N, а множество B_1 является пустым множеством. Для нахождения B_i и Y_i на последующих шагах требуется выполнить следующие операции. Все элементы множества Парето упорядочиваются по убыванию предпочтения значения критерия времени выполнения. Первый элемент данной последовательности, обозначим ее через X_1, будет иметь наибольшее время выполнения. По свойству упорядочивания элементов паретовских множеств в двухкритериальных пространствах его второй критерий имеет максимальное значение вероятности достижения цели. Приоритетность первого критерия возрастает с уменьшением его значения. Следовательно, время выполнения каждого следующего элемента в данной упорядоченной последовательности будет меньше предыдущего. Среди упорядоченных по уменьшению времени выполнения элементов последовательности X_1 осуществляется поиск первого элемента g_1, время выполнения которого меньше либо равно T.

Пусть требуемый элемент g_1 существует и включен в формируемое допустимое подмножество D. Величина ресурса времени корректируется $T1 = T - q_1$, где q_1 – время выполнения элемента g_1, и следующий элемент g_2 подмножества D должен иметь время выполнения, меньшее либо равное T_1.

Утверждение 3. Номер следующего элемента g_2 подмножества D, имеющий время выполнения, меньшее либо равное величине T_1, должен быть больше номера предыдущего элемента g_1.

Доказательство. Предположим противное, что существует элемент с меньшим номером, чем номер элемента g_1, который имеет время выполнения, меньшее либо равное величине T_1. Элемент g_1 по построению является первым элементом из X_1, чье время выполнения меньше либо равно T. Тогда все остальные элементы с меньшими номерами имеют время выполнения больше T. Вместе с тем очевидно, что величина $T_1 < T$. Следовательно, все элементы последовательности с меньшими номерами, чем номер g_1, имеют время выполнения больше, чем значение величины T_1. Утверждение доказано.

Пусть значение величины $T_1 > 0$. Среди элементов, имеющих больший номер в X_1, чем номер элемента g_1, определен первый элемент g_2, чье время выполнения меньше либо равно T_1. Элемент g_2 включается в допустимое подмножество D. Корректируется величина ресурса времени $T_2 = T_1 - q_2$. Построение D продолжается до тех пор, пока не исчерпан ресурс времени T либо не будет включен в D последний элемент последовательности X_1.

Утверждение 4. Подмножество B_i будет включать в себя все ранее рассмотренные элементы упорядоченной последовательности X_1 с номерами, меньшими, чем у последнего элемента из D.

Доказательство. На первом шаге алгоритма построения подмножества D определяется элемент в последовательности $X_1 \le T$. Тогда все элементы с номерами, меньшими, чем номер первого элемента g_1, если таковые существуют, имеют время выполнения больше T. Очевидно, что последовательность величин T_i монотонно убывающая. Тогда рассмотренные на первом шаге и не вошедшие в D элементы последовательности X_1 не могут войти в D и на всех последующих шагах. Поэтому они должны быть включены в B_1. Номер второго элемента g_2, по утверждению 4, больше номера первого элемента. Если между элементами g_1 и g_2 имеются еще элементы последовательности X_1, то их время выполнения будет больше как величины T_2, так и всех последующих T_i. Заключаем, что они не могут попасть в D. Аналогичным образом на последующих шагах все элементы X_1, не вошедшие в D, не могут быть включены в формируемое допустимое подмножество. По предположению, любой элемент может попасть в подмножество D только один раз. Тогда элементы из X_1, уже вошедшие в D, также включаются в B_1. Утверждение доказано.

Множества Y_i, по определению, включают в себя паретовские элементы из подмножеств A_i, которые содержат все элементы множества начальных данных N, кроме тех, которые входят в B_i. Следовательно, на каждом шаге формирования допустимого подмножества D множество Y_i содержит все оставшиеся элементы множества Парето из последовательности X_1. Покажем, что и элементы второго паретовского слоя на каждом шаге могут войти в множество Y_i. Из алгоритма формирования паретовских слоев следует, что каждый элемент второго паретовского слоя имеет в множестве Парето хотя бы один элемент, его доминирующий. Предположим, что элемент z_1 второго паретовского слоя доминируется некоторыми элементами множества Парето (обозначим их через R) и не доминируется остальными его элементами. Пусть после реализации некоторого шага было получено, что все элементы из R уже включены в D. Тогда элемент z_1 включается в соответствующее множество Y_i. Таким образом, после каждого включения в подмножество D очередного элемента из X_1 возможно включение в следующее Y_i элементов второго паретовского слоя.

Утверждение 5. Номер элемента z_1 в последовательности X_1 будет больше, чем номер последнего элемента из группы R, который был включен в D.

Справедливость этого утверждения следует из того факта, что элементы последовательности X_1 упорядочены по убыванию вероятности, и элемент z_1 доминируется всеми элементами из группы R. Действительно, по предположению у элементов из множества начальных данных N нет совпадающих значений координат. Тогда z_1 имеет меньшее значение вероятности, чем последний включенный в D элемент из R, а следовательно, и больший номер в последовательности X_1.

Утверждение 6. Пусть при поиске очередного g_i получено, что ни один последующий элемент X_1 не удовлетворяет условию, что их время выполнения меньше либо равно последнему значению T_i. Тогда ни один элемент из последующих паретовских слоев также не может войти в D.

Доказательство данного утверждения аналогично доказательству утверждения 3. Очевидно, что при выполнении условий утверждения 6 построение подмножества D закончено.

Предположим, что последний элемент последовательности X_1 имеет время выполнения меньшее либо равное T_i. Тогда он включается в подмножество D, и рассмотрение элементов последовательности X_1 закончено. Пусть вычисленное очередное значение величины T_i оказалось больше нуля. Дальнейшее формирование множеств Y_i будет осуществляться следующим образом. Если величина T_i превосходит значение соответствующей координаты верхней критериальной границы второго паретовского слоя, то время выполнения любого из элементов последующих паретовских слоев превосходит величину T, и формирование допустимого подмножества D закончено. В противном случае новое паретовское подмножество Y_i формируется из элементов второго и, возможно, третьего паретовских слоев. Очевидно, что подмножество B_i после включения в D последнего элемента X_1 содержит в себе все элементы этой последовательности. Необходимость последовательного рассмотрения паретовских слоев при построении множеств Y_i следует из утверждения 1 и определения паретовских слоев.

Элементы нового паретовского подмножества Y_i упорядочиваются по убыванию критерия времени выполнения. Дальнейшее построение допустимого подмножества D выполняется с ресурсом времени, равным последнему значению величины T_i. При этом последовательно рассматриваются элементы новой упорядоченной последовательности X_2. Если последний элемент X_2 вошел в допустимое подмножество и величина $T_i > 0$, то осуществляется переход к построению упорядоченной последовательности X_3 из элементов следующих паретовских слоев. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не исчерпан весь ресурс времени T. Как следует из вышеописанного алгоритма, перед началом формирования допустимого подмножества D требуется построение первых двух паретовских слоев. Остальные слои формируются по мере необходимости в зависимости от значений величин T_i.

Определение паретовских слоев, входящих в оптимальное подмножество

Первым множеством Y_1, с элементов которого начинается построение допустимого подмножества D, является множество Парето на всем наборе начальных данных N. Как следует из вышеприведенного алгоритма, на каждом шаге формирования D находится первый из возможных элементов последовательности X_1, время выполнения которого меньше либо равно значению величины T. Из способа построения X_1 следует, что может существовать группа элементов, каждый из которых меньше либо равен значению величины T. Любой из таких элементов может порождать новое допустимое подмножество и соответствующие ему паретовские подмножества Y_i. Весь набор допустимых подмножеств, каждый из которых содержит в себе хотя бы один элемент из множества Парето, будет обозначен через W. На каждом шаге построения допустимых подмножеств из W выбор происходит из соответствующего паретовского множества Y_i. Из доказательства утверждения 1 видно, что для любого допустимого подмножества, содержащего хотя бы один элемент, не входящий в Y_i, можно построить допустимое подмножество, принадлежащее W и имеющее большую суммарную вероятность входящих в него элементов. Значит, и оптимальное подмножество Q с максимальной суммарной вероятностью принадлежит группе допустимых подмножеств W. Выше было показано, что в зависимости от значения величины T и при выполнении условий утверждения 6 построение допустимых подмножеств может быть закончено некоторым элементом первой упорядоченной последовательности X_1. Если условия этого утверждения не выполняются, то требуется построение следующей упорядоченной последовательности X_2, содержащей элементы второго и третьего паретовских слоев. Этот процесс для каждого допустимого подмножества D_i из W продолжается, пока не будет исчерпан ресурс времени T. Получаем, для каждого отдельного подмножества D_i последним его элементом будет элемент паретовского слоя с некоторым номером, на основе которого сформирована последняя упорядоченная последовательность X_i. Все приведенные рассуждения дают возможность сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 7. Оптимальное подмножество Q, представляющее собой допустимое подмножество с максимальной суммарной вероятностью, имеет следующую структуру: $Q = \bigcup_{i=1}^{m} P_i$, где P_1 представляет собой подмножество элементов из множества Парето во введенном двухкритериальном пространстве; P_i – подмножества элементов, принадлежащих i-му паретовскому слою.

Для построения любого паретовского слоя в двухкритериальных пространствах используется алгоритм поиска в упорядоченных структурах данных, не требующий операций перебора, и сложность этого алгоритма оценивается величиной $O(n^2 \log_2 n)$. Все допустимые подмножества из группы W, которые содержат в себе оптимальное подмножество Q, определяются при помощи операций перебора с элементами только первых v паретовских слоев. Алгоритм построения всех допустимых подмножеств из W требует отдельного рассмотрения и в данной работе не рассматривается. Из алгоритма построения допустимых подмножеств следует, что при увеличении (уменьшении) значения ресурса T число перетовских слоев v, из элементов которых формируются допустимые подмножества из W, также может увеличиться (уменьшится). Таким образом, при использовании предлагаемой математической модели определение того, какие элементы могут входить в оптимальное подмножество Q, а какие исключаются из дальнейшего рассмотрения, зависит от значения величины T и не зависит от величины элементов в множестве N.

Область эффективного применения предлагаемого метода для решения задачи о ранце может быть определена следующим образом. Как уже отмечалось, методы решения задачи о ранце представляют собой различные способы перебора всех элементов множества начальных данных N. Предложенный метод будет тем эффективнее, чем меньшее число элементов из N потребуется для нахождения оптимального подмножества. При уменьшении значения ресурса T число перетовских слоев v также уменьшается. Однако важно в этом случае уменьшение числа v относительно общего количества паретовских слоев, полученных после разбиения на слои множества N. Пусть $F = T/Z$, где Z представляет собой сумму времени выполнения всех элементов начального множества N. Если $F \geq 1$, что означает, что размер ранца больше либо равен времени выполнения всех элементов начального множества N, то N представляет собой единственное допустимое подмножество, и постановка оптимизационной задачи о ранце теряет смысл. Будем полагать, что $F < 1$. Тогда F с определенной степенью точности можно интерпретировать как величину, показывающую, какую часть от общего числа паретовских слоев покрывает заданный размер ранца T. Пусть величина F в рассматриваемой задаче о ранце имеет значение, достаточно близкое к нулю. Тогда число паретовских слоев, а следовательно, и требуемых для построения оптимального подмножества элементов может быть существенно меньше их количества на множестве N. В этом случае применение предлагаемого метода становится наиболее эффективным.

При проведении всех предыдущих рассуждений предполагалось, что у элементов начального множества N нет совпадающих значений отдельных координат в двухкритериальном пространстве. Рассмотрим два случая совпадения координат. Первый вариант: существует элемент из множества Парето, который доминирует некоторый элемент из второго паретовского слоя и имеет с ним одинаковое время выполнения. Тогда значение его второй координаты (вероятности достижения цели) будет больше, чем значение вероятности у доминируемого элемента. Поэтому необходимость приоритетного выбора доминирующего элемента для включения в формируемое допустимое подмножество очевидна. Второй вариант: доминирующий и доминируемый элемент имеют одинаковые вероятности, но разное время выполнения. Пусть для включения в подмножество D выбирается доминируемый элемент с большим значением времени выполнения. Несмотря на то, что на всех шагах остальные элементы выбирались в соответствии с утверждением 1, общее время их выполнения может оказаться больше ресурса времени T. Тогда суммарная вероятность будет одинаковая в двух способах построения допустимого подмножества. Однако при выборе доминируемого элемента полученное подмножество может не быть допустимым. Тогда и во втором случае требуется выбирать доминирующий элемент из соответствующего паретовского подмножества Y_i.

Заключение

В работе представлен способ решения оптимизационной задачи о ранце на основе предложенной многокритериальной математической модели. Введение транзитивного двухкритериального пространства предпочтений на множестве начальных данных N позволило определить структуру оптимального подмножества Q как объединение групп подмножеств, принадлежащих первым m паретовским слоям, на которые разбивается множество начальных данных N. Предложенный в работе способ позволяет не рассматривать при построении допустимых подмножеств элементы из N, входящие во все последующие паретовские слои с номерами, большими, чем m. Тогда общее число операций, требуемых для решения рассматриваемой задачи в значительной степени зависит от значения величины T, а не от числа элементов в множестве N.

Список литературы

1. Альсведе Р., Вегенер И. Задачи поиска. М.: Мир, 1982. 367 с.
2. Посыпкин М.А. Комбинированный параллельный алгоритм решения задачи о ранце // Труды IV Междунар. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления». Москва, 27–29 октября 2008 г. С. 177–189.
3. Martello S., Toth P. Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations. N.Y.: John Wiley&Sons, 1990. 308 p.
4. Чебаков С.В. Двухкритериальная модель построения оптимального подмножества альтернатив с максимальной суммарной вероятностью достижения цели // Вести НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2005. № 2. С. 112–118.
5. Kung H.F., Preparata F.P. On finding the maxima of a set of vectors // Journal of the Association for Computing Machinery. 1975. Vol. 22. P. 469–476.

References

1. Al'svede R., Vegener I. Zadachi poiska. M.: Mir, 1982. 367 s. (in Russ.)
2. Posypkin M.A. Kombinirovannyj parallel'nyj algoritm reshenija zadachi o rance // Trudy IV Mezhdunar. konf. «Parallel'nye vychislenija i zadachi upravlenija». Moskva, 27–29 oktjabrja 2008 g. S. 177–189. (in Russ.)
3. Martello S., Toth P. Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations. N.Y.: John Wiley&Sons, 1990. 308 p.
4. Chebakov S.V. Dvuhkriterial'naja model' postroenija optimal'nogo podmnozhestva al'ternativ s maksimal'noj summarnoj verojatnost'ju dostizhenija celi // Vesti NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. nauk. 2005. № 2. S. 112–118. (in Russ.)
5. Kung H.F., Preparata F.P. On finding the maxima of a set of vectors // Journal of the Association for Computing Machinery. 1975. Vol. 22. P. 469–476.

Информация об авторах

Чебаков С.В., к.ф.-м.н., с.н.с. Объединенного института проблем информатики НАН Беларуси.

Серебряная Л.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,
г. Минск, ул. П. Бровки, 6,
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
тел. +375297739509;
e-mail: l_silver@mail.ru
Серебряная Лия Валентиновна

Information about the authors

Chebakov S.V., PhD, senior researcher of the United Institute of Informatics Problems of NAS of Belarus.

Serebryanaya L.V., PhD, associate professor of the information technology software department of Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics.

Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,
Minsk, P. Brovka str., 6,
Belarusian State University
of Informatics and Radioelectonics
tel. +375-29-773-95-09;
e-mail: l_silver@mail.ru
Serebryanaya Liya Valentinovna