УДК 517.977

К УСЛОВИЯМ РЕГУЛЯРНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Л.И. МИНЧЕНКО, С.И. СИРОТКО

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 29 июня 2018

Аннотация. Статья посвящена условию R-регулярности (Error Bound Property) в задачах математического программирования. Данное условие играет важную роль в анализе сходимости численных алгоритмов оптимизации и является достаточно общим условием регулярности (constraint qualification) в задачах математического программирования. В статье получаются новые достаточные условия наличия R-регулярности в задачах математического программирования.

Ключевые слова: математическое программирование, условия регулярности, error bound.

Abstract. The article is devoted to the condition of R-regularity (Error Bound Property) in problems of mathematical programming. This condition plays an important role in analyzing the convergence of numerical optimization algorithms and it is a fairly general condition of regularity (constraint qualification) in problems of mathematical programming. The article obtains new sufficient conditions for the presence of R-regularity in problems of mathematical programming.

Keywords: mathematical programming, constraint qualifications, error bound.

Doklady BGUIR. 2018, Vol. 118, No. 8, pp. 76-80
On constraint qualifications in mathematical programming
L.I. Minchenko, S.I. Sirotko

1. Введение

Рассмотрим стандартную задачу (P) математического программирования:

$$f(y) \to \inf,$$

$$y \in C = \{ y \in R^m \mid h_i(y) \le 0 \ \ i \in I, \ \ h_i(y) = 0 \ \ i \in I_0 \},$$

где $I = \{1,...,s\}$, $I_0 = \{s+1,...,p\}$, и все функции $f(y)$, $h_i(y)$ $i = 1,...,p$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

Положим $I(y) = \{ i \in I \mid h_i(y) = 0 \}$. Будем обозначать через

$$\mathrm{T}_C(y) = \{ \bar{y} \in R^m \mid \exists \text{ последовательности } t_k \downarrow 0 \ и \ \bar{y}^k \to \bar{y} \text{ такие, что } y + t_k \bar{y}^k \in C \ \ \forall\, \mathrm{k} = 1,2,... \},$$

$$\Gamma_C(y) = \{ \bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \le 0 \ \ i \in I(y), \ \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0 \ \ i \in I_0 \}$$

соответственно касательный конус и линеаризованный касательный конус к множеству C в точке $y \in C$. Через $d_c(y)$ будем обозначать расстояние от точки y до множества C.

Начиная с фундаментальной работы Хоффмана [1], условию R-регулярности (error bound property) посвящены многочисленные публикации [2–7].

Определение 1 ([2]). Множество C называют R-регулярным в точке $y^0 \in C$, если найдутся число $M > 0$ и окрестность $V(y^0)$ такие, что $d_C(y) \le M \max\{ 0, h_i(y) \ i \in I, \ |h_i(y)| \ i \in I_0 \}$ для всех $y \in V(y^0)$.

Поскольку условие R-регулярности играет важное значение как в качестве условия регулярности, обеспечивающего справедливость необходимых условий оптимальности Куна-Таккера (см., например, [8]), так и в качестве удобного средства для анализа сходимости численных алгоритмов оптимизации, представляет интерес вывод достаточных условий, гарантирующих его выполнение в конкретных задачах. Существуют различные подходы к получению такого рода достаточных условий. В [3] данные условия получаются в терминах субдифференциалов, в [4, 5] условия R-регулярности доказываются на основе полученной в [4] частичной ограниченности множества множителей Лагранжа в R-регулярных точках. В ряде работ проводится анализ существующих условий регулярности и доказывается, что R-регулярность вытекает из некоторых других известных условий регулярности. В частности, из работ [2,4,5,7] следует, что условие R-регулярности является результатом выполнения условия Мангасаряна-Фромовица (*MFCQ*) [9], условия постоянного ранга [10], ослабленного условия постоянного ранга (*RCRCQ*) [4], условия квазинормальности [11], ослабленного условия Мангасаряна-Фромовица (*RMFCQ*) [6, 7].

Вместе с тем наиболее общие условия регулярности формулируются непосредственно в терминах касательных конусов к множеству допустимых точек. Таким условием регулярности является условие регулярности Абади (*ACQ*), которое заключается в совпадении конусов $\mathrm{T}_C(y)$ и $\Gamma_C(y)$. Известно, что выполнение условия регулярности Абади в точке $y\in C$ не влечет справедливость в этой точке условия R-регулярности. Целью настоящей статьи является доказательство достаточных условий R-регулярности, основанных на условии регулярности Абади. Ниже в работе приняты стандартные обозначения: K^* – полярный конус для конуса K, $\langle y,v\rangle$ – скалярное произведение векторов y и v.

2. Достаточное условие *R*-регулярности

Пусть $y^0\in C$ и K – некоторое множество индексов из $I(y^0)$. Положим $C(K)=\{y\in R^m\,|\,h_i(y)\le 0\ \ i\in K,\ h_i(y)=0\ \ i\in I_0\}$. При этом $C(K)=C$, если $K=I(y^0)$. Соответственно,

$\Gamma_{C(K)}(y^0)=\{\ \bar{y}\in R^m\ |\ \langle\nabla h_i(y^0),\bar{y}\,\rangle\le 0\ \ i\in K,\ \langle\nabla h_i(y^0),\bar{y}\,\rangle=0\ \ i\in I_0\,\}$.

Пусть $\prod_C(v)$ – множество точек из C, ближайших к точке v и $y\in\prod_C(v)$. Тогда любой вектор $\lambda(v–y)$ при $\lambda\ge 0$ называется проксимальной нормалью к C в точке y [12]. Множество всех проксимальных нормалей в точке $y^0\in C$ образуют конус $N_C^P(y^0)$.

Пусть $r\in(0,+\infty)$. Следуя [13], будем называть множество C равномерно r-prox-регулярным в точке $y^0\in C$, если существует окрестность $V(y^0)$ данной точки такая, что при всех $0\ne\bar{v}\in N_C^P(y^0)$ справедливо

$$\left\langle\frac{\bar{v}}{|\,\bar{v}\,|},y-y^0\right\rangle\le\frac{1}{2r}\left|y-y^0\right|^2 \tag{1}$$

для всех $y\in C\cap V(y^0)$. При этом условно принимается, что $1/r=0$ при $r=+\infty$, и r-prox-регулярность равносильна выпуклости C в окрестности y^0 при $r=\infty$.

Равномерная r-prox-регулярность C в точке $y^0\in C$ означает, что в некоторой окрестности данной точки из $\prod_C(v)$ следует $y\in\prod_C(y+r\dfrac{v-y}{|\,v-y\,|})$.

Как говорилось выше, условие *ACQ* для множества C не является достаточным условием для R-регулярности этого множества. Следующая теорема показывает, однако, что при условии равномерной r-prox-регулярности C совокупное выполнение условия *ACQ* для всех множеств $C(K)$ достаточно для R-регулярности C.

Теорема 1. Пусть C равномерно r-prox-регулярно в точке $y^0\in C$ и $T_{C(K)}(y^0)=\Gamma_{C(K)}(y^0)$ для любого $K\subset I(y^0)$. Тогда множество C R-регулярно в y^0.

Доказательство.

1. Очевидно, доказываемое утверждение верно, если y^0 является внутренней точкой множества C. Пусть y^0 лежит на границе C. Предположим, что множество C не является

R-регулярным в данной точке. Это означает, что найдется последовательность $v^k \to C$, $v^k \notin C$ такая, что

$$d_C(v^k) > k \max\{0, h_i(v^k) \ \ i \in I, |h_i(v^k)| \ \ i \in I_0\} \qquad (2)$$

для всех $k = 1,2,\dots$.

Пусть $y^k = y(v^k) \in \prod_C(v^k)$. Положим $\bar{v}^k = (v^k - y^k)|v^k - y^k|^{-1}$, $k = 1,2,\dots$. Тогда $|v^k - y^k| \le |v^k - y^0|$ и, следовательно, $y^k \to y^0$.

Поскольку множество индексов $I(y^k)$ может принимать только конечное множество значений, то его, не ограничивая общности, можно считать не изменяющимся, то есть $I(y^k) = K \subset I(y^0)$, где K не зависит от y^0. Тогда $h_i(y^k) = 0 \ \ i \in K$ и $h_i(y^k) < 0 \ \ i \in I \setminus K$, причем вследствие непрерывности функций h_i найдется окрестность $V(y^k)$ такая, что $h_i(y) < 0 \ \ i \in I \setminus K$ для всех $y \in V(y^k)$. То есть, $h_i(y) \le 0 \ \ y \in K$ при $y \in C(K)$ и $h_i(y) < 0 \ \ y \in I \setminus K$ при $y \in V(y^k)$, откуда $V(y^k) \cap C(K) \subset C$. Отсюда $d_C(v^k) = d_{C(K)}(v^k)$ и, значит, $y^k \in \prod_{C(K)}(v^k)$. Ввиду ограниченности последовательности $\{\bar{v}^k\}$ считаем ее сходящейся, то есть $\bar{v}^k \to \bar{v}$. Тогда из (2) следует:

$$d_C(v^k) > k \max\{0, h_i(v^k) \ \ i \in K, \ |h_i(v^k)| \ \ i \in I_0\},$$

и, следовательно

$$|v^k - y^k| > k \max\{0, \langle \nabla h_i(\tilde{v}_i^k), v^k - y^k \rangle \ \ i \in K, \ |\langle \nabla h_i(\tilde{v}_i^k), v^k - y^k \rangle| \ \ i \in I_0\},$$

где $\tilde{v}_i^k = y^k + \tau_{ki}(v^k - y^k)$, $0 \le \tau_{ki} \le 1$. Отсюда $\frac{1}{k} > \max\{0, \langle \nabla h_i(\tilde{v}_i^k), \bar{v}^k \rangle \ \ i \in K, \ |\langle \nabla h_i(\tilde{v}_i^k), \bar{v}^k \rangle| \ \ i \in I_0\}$, и, следовательно, $\max\{0, \langle \nabla h_i(y^0), \bar{v} \rangle \ \ i \in K, \ |\langle \nabla h_i(y^0), \bar{v} \rangle| \ \ i \in I_0\} \le 0$.

Последнее означает, что $\bar{v} \in \Gamma_{C(K)}(y^0)$.

2. Поскольку при достаточно больших k проекции v^k на C являются и проекциями на $C(K)$, то для любого $\tilde{y} \in C(K)$, в силу (2), получим $\langle \tilde{y} - y^k, \bar{v}^k \rangle \le \frac{1}{2r}|\tilde{y} - y^k|^2$, откуда после перехода к пределу следует $\langle \tilde{y} - y^0, \bar{v} \rangle \le \frac{1}{2r}|\tilde{y} - y^0|^2$ для всех $\tilde{y} \in C(K)$.

Пусть $\bar{y} \in T_{C(K)}(y^0)$. Тогда существуют последовательности $t_l \downarrow 0$ и $\bar{y}^l \to \bar{y}$ такие, что $y^0 + t_l \bar{y}^l \in C(K)$ для всех $l = 1,2,\dots$. Отсюда $\langle \bar{y}^l, \bar{v} \rangle \le \frac{1}{2r} t_l |\bar{y}^l|^2$ и, следовательно, $\langle \bar{y}, \bar{v} \rangle \le 0$ для всех $\bar{y} \in T_{C(K)}(y^0)$. Поскольку в силу условия теоремы $T_{C(K)}(y^0) = \Gamma_{C(K)}(y^0)$, то $\bar{v} \in [\Gamma_{C(K)}(y^0)]^*$. Как показано в первой части доказательства, $\bar{v} \in \Gamma_{C(K)}(y^0)$. Следовательно, $\bar{v} \in [\Gamma_{C(K)}(y^0)]^* \cap [\Gamma_{C(K)}(y^0)]^*$, что невозможно, поскольку $\bar{v} \ne 0$. Из полученного противоречия следует, что множество C R-регулярно в точке y^0.

Следствие 1. Если в определении множества C $h_i(y) = \langle a_i, y \rangle + b_i$ при всех $i \in I \cup I_0$, то множество C R-регулярно в любой точке $y^0 \in C$.

Следующий пример показывает, что теорема 1 позволяет доказать R-регулярность множеств, для которых не выполняются известные достаточные условия регулярности [6–16].

Пример 1. Пусть $h_1(y) = 1 - y_1^2 - (y_2 - 1)^2 \le 0$, $h_2(y) = 1 - y_1^2 - (y_2 + 1)^2 \le 0$, $y^0 = (0,0)^T$.

Множество C равномерно 1-prox-регулярно в y^0. Нетрудно убедиться, что для C в y^0 не выполняется условие MFCQ. Точно так же не выполняются условие RCRCQ, условие RMFCQ и условие квазинормальности. Более того, не выполнены достаточные условия [3]. Однако множества $C(K_1) = \{y \in R^2 \mid 1 - y_1^2 - (y_2 - 1)^2 \le 0\}$ при $K_1 = \{1\}$ и $C(K_1) = \{y \in R^2 \mid 1 - y_1^2 - (y_2 + 1)^2 \le 0\}$ при $K_2 = \{2\}$ удовлетворяют условию ACQ в точке y^0. А для множества C в y^0 выполнено условие $T_C(y^0) = \Gamma_C(y^0)$. Таким образом, C R-регулярно в точке y^0 согласно теореме 1.

Проверим данное утверждение, используя непосредственно определение R-регулярности. Возьмем значение $v = (v_1, v_2)^T$, достаточно близкое к y^0 и такое, что $v_2 > 0$.

Нетрудно проверить, что в таком случае $d_C(v)=1-\sqrt{1-2v_2+(v_1^2+v_2^2)}<v_2-\frac{v_1^2+v_2^2}{2}$, $\max\{0,h_1(v),h_2(v)\}=2v_2-(v_1^2+v_2^2)$.

То есть, условие R-регулярности в точке $y^0=(0,0)^T$ выполняется в достаточно малой окрестности y^0 с постоянной $M=2$. Аналогичный результат получается в случае $v_2<0$.

Список литературы

1. Hoffman A.J. On approximate solutions of systems of linear inequalities // J. Res. Natl. Bureau Stand. 1952. Vol. 49. P. 263–265.
2. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Kluwer Acad. Publ., Dordreht, 2002. 220 p.
3. Error Bounds: Necessary and Sufficient Conditions / M.J. Fabian [et al.] // Set-Valued and Variational Analysis. 2010. Vol. 18 (2). P. 121–149.
4. Minchenko L.I., Stakhovski S.M. On relaxed constant rank regularity condition in mathematical programming. // Optimization. 2011. Vol. 60. P. 429–440.
5. Minchenko L., Tarakanov A. On error bounds for quasinormal programs // J. Optim. Theory and Appl., 2011. Vol. 148. P. 571–579.
6. Минченко Л.И., Стаховский С.М. К обобщению условий регулярности Мангасаряна-Фромовица // Докл. БГУИР. 2010. № 8 (62). С. 104–109.
7. Kruger A.Y., Minchenko L.I., Outrata J.V. On relaxing the Mangasarain–Fromovitz constaint qualication // Positivity. 2013. Vol. 17. P. 1–17.
8. Mangasarian O. L., Fromovitz S. The Fritz-John necessary optimality conditions in presence of equality and inequality constraints // J. Mathem. Anal. and Appl. 1967. Vol. 17. P. 37–47.
9. Janin R. Direction derivative of the marginal function in nonlinear programming // Mathematical Programming Study. 1984. Vol. 21. P. 127–138.
10. Bertsekas D.P., Ozdaglar A.E. The relation between pseudonormality and quasiregularity in constrained optimization // Optimization Methods and Software. 2004. Vol. 19. P. 493–506.
11. Гороховик В.В. Конечномерные задачи оптимизации. Минск: Изд.БГУ, 2007. 239 с.
12. Rockafellar R.T., Wets R.J.-B. Variational analysis. Springer, Berlin, 1998. 749 p.
13. Bounkhel M. Regularity concepts in nonsmooth analysis. Theory and applications. Springer, 2012. 264 p.

References

1. Hoffman A.J. On approximate solutions of systems of linear inequalities. // J. Res. Natl. Bureau Stand. 1952. Vol. 49. P. 263–265.
2. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Kluwer Acad. Publ., Dordreht, 2002. 220 p.
3. Error Bounds: Necessary and Sufficient Conditions / M.J. Fabian [et al.] // Set-Valued and Variational Analysis. 2010. Vol. 18 (2). P. 121–149.
4. Minchenko L.I., Stakhovski S.M. On relaxed constant rank regularity condition in mathematical programming. // Optimization. 2011. Vol. 60. P. 429–440.
5. Minchenko L., Tarakanov A. On error bounds for quasinormal programs // J. Optim. Theory and Appl., 2011. Vol. 148. P. 571–579.
6. Minchenko L.I., Stahovskij S.M. K obobshheniju uslovij reguljarnosti Mangasarjana-Fromovica // Dokl. BGUIR. 2010. № 8 (62). S. 104–109. (in Russ.)
7. Kruger A.Y., Minchenko L.I., Outrata J.V. On relaxing the Mangasarain–Fromovitz constaint qualication // Positivity. 2013. Vol. 17. P. 1–17.
8. Mangasarian O. L., Fromovitz S. The Fritz-John necessary optimality conditions in presence of equality and inequality constraints // J. Mathem. Anal. and Appl. 1967. Vol. 17. P. 37–47.
9. Janin R. Direction derivative of the marginal function in nonlinear programming // Mathematical Programming Study. 1984. Vol. 21. P. 127–138.
10. Bertsekas D.P., Ozdaglar A.E. The relation between pseudonormality and quasiregularity in constrained optimization // Optimization Methods and Software. 2004. Vol. 19. P. 493–506.
11. Gorohovik V.V. Konechnomernye zadachi optimizacii. Minsk: Izd.BGU, 2007. 239 s. (in Russ.)
12. Rockafellar R.T., Wets R.J.-B. Variational analysis. Springer, Berlin, 1998. 749 p.
13. Bounkhel M. Regularity concepts in nonsmooth analysis. Theory and applications. Springer, 2012. 264 p.

Сведения об авторах

Минченко Л.И., д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры информатики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Сиротко С.И., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры информатики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Information about the authors

Minchenko L.I., D.Sci, professor, professor of informatics department of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

Sirotko S.I., PhD, associate professor, associate professor of informatics department of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,
г. Минск, ул. П. Бровки, 6,
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
+375-17-293-86-66;
e-mail: sergeyis@bsuir.by
Сиротко Сергей Иванович

Address for correspondence

220013 Republic of Belarus,
Minsk, P. Brovka st., 6,
Belarusian state university
of informatics and radioelectronics
+375-17-293-86-66;
e-mail: sergeyis@bsuir.by
Sirotko Sergey Ivanovich