

УДК 519.63/537.87

## АЛГОРИТМ С СИЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДОВ

А.А. КУРАЕВ, В.В. МАТВЕЕНКО, Т.Л. ПОПКОВА

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Республика Беларусь*

*Поступила в редакцию 19 февраля 2018*

**Аннотация.** Предложен конечношаговый алгоритм с сильной устойчивостью для решения некорректных двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в теории нерегулярных волноводов.

*Ключевые слова.* обыкновенные дифференциальные уравнения, двухточечная краевая задача, сильно устойчивые конечноразностные алгоритмы.

**Abstract.** It's proposed a finite-step algorithm with strong stability for solving incorrectly formulated two-point boundary problems for ordinary differential equations arising in the irregular waveguide theory.

*Keywords.* ordinary differential equations, two-point boundary problem, strong stability finite-difference algorithms.

**Doklady BGUIR. 2018, Vol. 118, No. 8, pp. 12-17**

**Strong stability algorithm for solving boundary problems in the irregular waveguide theory**

**A.A. Kurayev, V.V. Matveyenko, T.L. Popkova**

### Введение

В теории нерегулярных волноводов искомые поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  или потенциалы  $\vec{A}$ ,  $\vec{\Pi}^{e,m}$  представляются в виде разложений в полной системе векторных собственных функций вспомогательной поперечной краевой задачи. Для коэффициентов – функций разложения (амплитуд связанных волн) при этом получается двухточечная краевая задача для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с переменными коэффициентами. Эта задача при наличии закритических участков в волноводе является некорректной, и все имеющиеся в среде MATLAB конечношаговые методы (как показано в статье) расходятся. Это требует создания сильно устойчивого метода решения ОДУ указанного типа. Один из таких методов предложен в статье. Его эффективность продемонстрирована на тестовой задаче распространения  $H_{01}$  волны в нерегулярном волноводе с закритическими участками.

### Тестовая задача: распространение $H_{01}$ -волны в продольно-нерегулярном волноводе с круговым сечением

Вспользуемся теорией, развитой в [1], для случая распространения азимутально-симметричных  $H_{0l}$ -волн в продольно-нерегулярном волноводе с круговым сечением и переменным внутренним радиусом  $b(z)$ . В соответствии с этой теорией компоненты  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  таких волн определяются через векторный потенциал  $\vec{A} = \varphi_0 A_\varphi$  следующим образом:

$\vec{E} = -\varphi_0 \frac{\partial A_\varphi}{\partial t}$ ,  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\varphi_0 A_\varphi)$ , где для установившегося периодического во времени процесса

$$A_\varphi = \text{Re} \sum_m \sum_s \dot{a}_{sm}(z) \phi_s(r, z) e^{jm\omega t}, \quad (1)$$

$\phi_s(r, z) = J_1\left(\mu_s \frac{r}{b(z)}\right)$ ,  $J_1(x)$  – функция Бесселя 1-го рода, 1-го порядка,  $\mu_s$  – корень производной  $J_1'(x)$ :  $J_1'(x) = 0$ ,  $s$  – номер корня.

Коэффициенты разложения в (1) определяются следующей системой обыкновенных ОДУ:

$$\frac{d^2 \dot{a}_{pm}}{dz^2} + h^2 \dot{a}_{pm} + \sum_s \left\{ Q_{sp} \dot{a}_{sm} + P_{sp} \frac{d\dot{a}_{sm}}{dz} \right\} = 0, \quad (2)$$

где  $Q_{sp} = \frac{1}{e_p s_\perp} \int \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2} \phi_p ds_\perp$ ,  $P_{sp} = \frac{2}{e_p s_\perp} \int \frac{\partial \phi_s}{\partial z} \phi_p ds_\perp$ ,  $e_p = \int \phi_p^2 ds_\perp$ ,  $p = 1, 2, 3, \dots$

Система (2) определяет амплитуды  $\dot{a}_{pm}$  связанных волн в нерегулярном волноводе.

Для полного представления поля в (1) следует (при больших  $\frac{\partial b}{\partial z}$  и  $\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}$ ) учитывать 3 – 8 закритических волн, связанных с  $H_{01}$ , как это показывают тестовые расчеты.

Для демонстрации свойств предложенного алгоритма, однако, решение такой громоздкой задачи представляется нецелесообразным. Поэтому, как и в [1], будем пренебрегать взаимодействием мод и положим:  $p = 1$ ,  $Q_{s1} = P_{s1} = 0$ . Таким образом, данный пример приобретает в определенной степени методический характер. Теперь система (2) редуцируется к одному уравнению вида

$$\frac{d^2 \dot{a}}{dz^2} + (h^2 + Q) \dot{a} + P \frac{d\dot{a}}{dz} = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$Q_{sp} = \frac{1}{e_1 s_\perp} \int \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2} \phi ds_\perp, \quad P_{sp} = \frac{2}{e_1 s_\perp} \int \frac{\partial \phi_s}{\partial z} \phi ds_\perp, \quad e_1 = \int \phi^2 ds_\perp = \pi b^2 J_2^0(\mu_{01}), \quad h^2 = k^2 - \left(\frac{\mu_{01}}{b}\right)^2.$$

Для приведения (3) к виду уравнений «четного» типа воспользуемся, как и в [1], следующей заменой переменных:

$$\dot{a} = \dot{C}/(j\omega g), \quad g = b(z)/b_{kp}, \quad b_{kp} = \frac{\mu_{01}}{k}, \quad T = kz = \frac{\omega}{c} z. \quad (4)$$

Тогда получаем следующее уравнение относительно  $\dot{C}$ :

$$\frac{d^2 \dot{C}}{dT^2} + \bar{Q}(T) \dot{C} = 0. \quad (5)$$

$$\text{Здесь } \bar{Q}(T) = 1 - \left(\frac{1}{g(T)}\right)^2 - \frac{\mu_{01}^2}{3g^2} \left(\frac{dg}{dT}\right)^2.$$

Зададим  $g(T)$  в виде  $g(T) = 1 + \Delta + H \sin^2\left(a_1 \frac{T}{L_0} + a_3 \frac{T^3}{L_0^3} + a_5 \frac{T^5}{L_0^5}\right)$ ,  $0 \leq T \leq L_0$ , причем  $L_0$

выберем так, что  $\frac{dg}{dT}(L_0) = 0$ , ( $a_1, a_3, a_5$  – постоянные коэффициенты). Тогда граничные условия к (5) в случае согласования концов волноводной секции при  $T = 0, L_0$  будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{C}}{dT}(0) &= j \frac{h(0)}{k} \dot{C}(0) + A_0, \\ \dot{C}(0) &= B + jD.\end{aligned}\tag{6}$$

Можно положить  $A_0 = 1$  (нормированный входной сигнал). Величины  $B$  и  $D$  необходимо выбирать из условий отражения и отсутствия сигнала справа:

$$\frac{d\dot{C}}{dT}(L_0) = -j \frac{h(L_0)}{k} \dot{C}(L_0).\tag{7}$$

Задача (6), (7) относится к некорректным: малая ошибка в определении  $\dot{B}$  и  $\dot{D}$  приводит к развалу решения.

### Алгоритм с сильной устойчивостью для решения краевой задачи для ОДУ второго порядка

Термин «сильно устойчивый алгоритм» заимствован из [2]. В монографии [2] приведен алгоритм указанного типа для решения ОДУ первого порядка вида

$$\frac{df}{dT} - P(T) f = F(T).\tag{8}$$

В соответствии с предложенным в [2] алгоритмом функция  $f$  на промежутке  $T_{m-1} - T_m$  вычисляется как  $f = \frac{f_{m+1} + f_m}{2}$ , а производная  $f' = \frac{f_{m+1} - f_m}{\Delta T}$ ,  $\Delta T$  – шаг по аргументу  $T$ .

При этом реализуется алгоритм

$$f_{m+1} = \frac{f_m \cdot \left( \frac{1}{\Delta T} + \frac{P_m}{2} \right)}{\frac{1}{\Delta T} - \frac{P_m}{2}}.\tag{9}$$

Здесь  $f_m, P_m$  – вычисленные значения соответствующих функций на  $m$ -шаге. Заметим, что при  $P(T) = P_0 = \text{const}$  и  $F = 0$  решение является экспонентой, а формула (9) – конечно-разностное выражение экспоненты. Разовьем предложенную в [2] методику для уравнений второго порядка вида

$$\frac{d^2 f}{dT^2} + P(T) \frac{df}{dT} + Q(T) f = 0.\tag{10}$$

$$\text{Представим } f = \frac{f_{m+1} + f_m}{2}, \quad \frac{df}{dT} = \left( \frac{f_{m+1} - f_m}{\Delta T} \right) k_1, \quad \frac{d^2 f}{dT^2} = \left( \frac{f_{m+1} - f_m}{\Delta T^2} \right) - \left( \frac{f_m - f_{m-1}}{\Delta T^2} \right),$$

тогда получим следующий конечношаговый алгоритм решения:

$$f_{m+1} = \frac{f_m \left[ k_1 \left( \frac{1}{\Delta T^2} + \frac{P_m}{\Delta T} \right) \right] - \frac{Q_m}{2} f_m + \frac{(f_m - f_{m-1})}{\Delta T^2}}{\left( k_1 \left[ \frac{1}{\Delta T^2} + \frac{P_m}{\Delta T} \right] + \frac{Q_m}{2} \right)} k_2.$$

В случае когда в (10)  $P(T) = 0$ , полученный алгоритм редуцируется к следующему виду:

$$f_{m+1} = \frac{f_m \cdot \frac{k_1}{\Delta T^2} - Q_m f_m + \frac{(f_m - f_{m-1})}{\Delta T^2}}{\left( \frac{k_1}{\Delta T^2} + \frac{Q_m}{2} \right)} k_2.\tag{11}$$

Здесь  $k_1$  – коэффициент, уточняющий положение рассчитываемой  $\frac{df}{dT}$  на отрезке  $[T_m, T_{m+1}]$ ,  $k_2$  – стабилизирующий коэффициент [3]. Они подбираются для конкретной решаемой задачи.

Алгоритм (11) удовлетворяет понятию «сильно устойчивого» и может быть использован для решения некорректных задач типа (6), (7).

### Решение краевой задачи (6), (7)

Предварительное решение задачи (6), (7) для определения начальных значений  $\dot{B}$ ,  $\dot{D}$ , при которых удовлетворяются условия (7), проводилось с использованием аппарата  $T$ -функций [4, 6]. При известных  $\dot{B}$ ,  $\dot{D}$  решаемая задача становилась задачей Коши в форме (6). Решение этой задачи проводилось с использованием семи стандартных алгоритмов из Matlab: ode45, ode23, ode113, ode23tb, ode15s, ode23s, ode23t и предложенного в статье алгоритма в форме (11).

*Вариант 1.*  $L_0=8\pi$ ;  $A_0=1$ ;  $\dot{B}=143,8$ ;  $\dot{D}=0,375$ ,  $\frac{h(0)}{k}=-0,526j$ ,  $\Delta=-0,115$ ,  $H=0,55$ ,  $a_1=5,5\pi$ ,  $a_2=0$ ,  $a_3=0$ . На рис. 1 приведены профиль гофра (шкала справа) и расчет  $C(T) = |\dot{C}(T)|$  с использованием стандартных алгоритмов (все они дают почти совпадающие результаты). Как видно из графика  $C(T)$ , решение расходится: волновод закритический,  $C(T)$  должно убывать, а в расчете оно, наоборот, возрастает в десятки раз, т.е. не отвечает физическому содержанию задачи. На рис. 2 представлены решения той же задачи на основе  $T$ -функций и предложенного алгоритма (11) при  $k_1=1,05$ ;  $k_2=0,999875$ . Теперь полученные решения адекватны решаемой задаче:  $H_{01}$  в гофрированном закритическом для этой волны волноводе затухает. Незначительное расхождение данных расчетов с использованием  $T$ -функций и алгоритма (11) объяснимо тем, что тот и другой расчет приближенные.

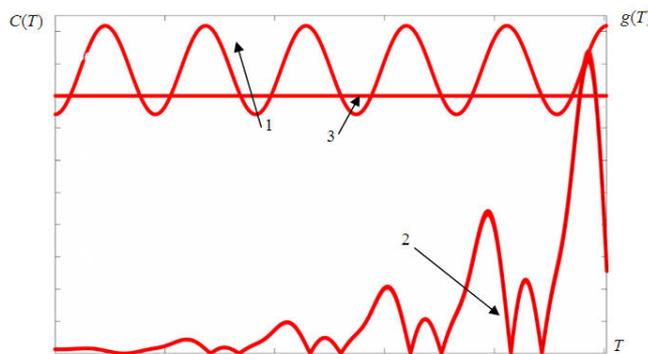


Рис. 1. Расчет амплитуды поля  $C(T)$  стандартными методами для варианта 1:  
1 – профиль волновода  $g(T)$ ; 2 –  $C(T)$ ; 3 –  $g_{sp}$

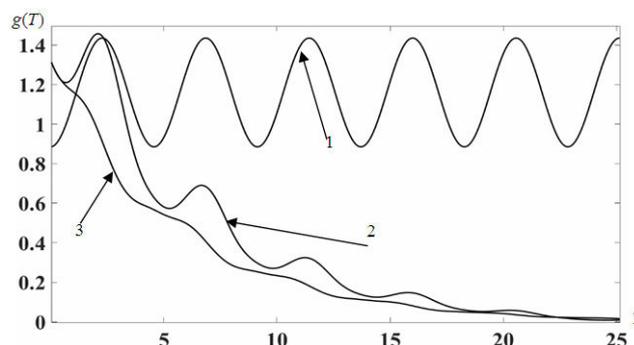


Рис. 2. Расчет амплитуды поля  $H_{01} C(T)$  методами  $T$ -функций и предложенным алгоритмом для варианта 1:  
1 – профиль волновода  $g(T)$ ; 2 –  $C(T)$  –  $T$ -функций; 3 –  $C(T)$  по предложенному методу

Вариант 2.  $L_0 = 15\pi$ ;  $A_0 = 1$ ;  $\dot{B} = -1$ ;  $\dot{D} = -0,0017$ ,  $\frac{h(0)}{k} = -0,328j$ ,  $\Delta = -0,05$ ,  $H = 0,22$ ,

$a_1 = 15\pi$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 0$ . Рис. 3 иллюстрирует результаты расчета  $C(T)$  стандартными алгоритмами из Matlab. Как и в предыдущем варианте, решение очевидным образом расходится:  $C(T)$  вместо уменьшения возрастает в десятки тысяч раз. На рис. 4 приведены решения задачи, полученные с использованием  $T$ -функций и предложенного алгоритма (11) при  $k_1 = 1,07$ ;  $k_2 = 0,99987$ . Решения практически совпадают и отвечают физическому содержанию задачи.

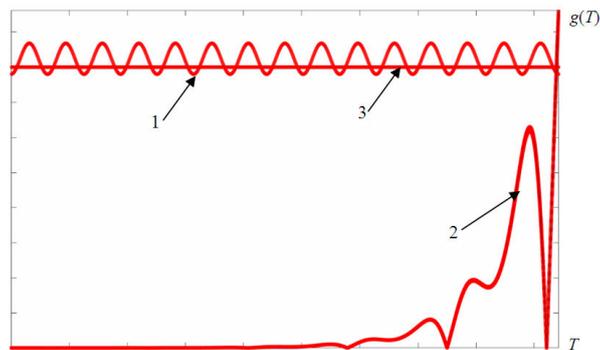


Рис. 3. Расчет амплитуды поля  $C(T)$  стандартными методами для варианта 2: 1 – профиль волновода  $g(T)$ ; 2 –  $C(T)$ ; 3 –  $g_{cp}$

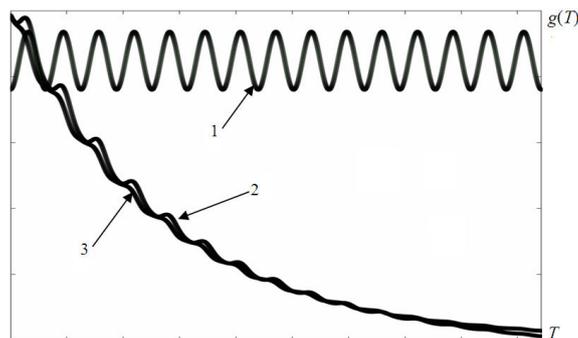


Рис. 4. Расчет амплитуды поля  $H_{01} C(T)$  методами  $T$ -функций и предложенным алгоритмом для варианта 2: 1 – профиль волновода  $g(T)$ ; 2 –  $C(T)$  –  $T$ -функций; 3 –  $C(T)$  по предложенному методу

### Заключение

Приведенные материалы позволяют утверждать, что предложенный алгоритм вида (11) с сильной устойчивостью может быть использован для решения некорректных задач в теории нерегулярных волноводов. Используемая методика построения алгоритма может быть использована и для решения систем ОДУ как первого, второго, так и высших порядков.

### Список литературы

1. Кураев А.А., Ковалев И.С., Колосов С.В. Численные методы оптимизации в задачах электроники СВЧ. Минск: Наука и техника, 1975. 296 с.
2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П. Разностные схемы с операторными множителями. Минск, 1998. 442 с.
3. Kurayev A.A., Matveyenko V.V., Popkova T.L. Algorithms with Stabilizing Coefficients for Solving Poorly Determined Radiophysics Problems // Radiofizika i elektronika. 2016. Vol. 7, № 3. P. 5–10.
4. Кураев А.А., Попкова Т.Л., Яроменок С.И. Аппарат  $T$ -функций для решения двухточечных краевых задач в теории нерегулярных волноводов // Радиотехника. 2004. № 9. С. 34–39.
5. Кураев А.А., Попкова Т.Л., Яроменок С.И.  $T$ -функции для четных численно-аналитических методов решения краевых задач электродинамики // Вести НАН Беларуси. 2005. № 2. С. 60–68.
6. Кураев А.А., Попкова Т.Л., Сеницын А.К. Электродинамика и распространение радиоволн. М., 2016. 424 с.

## References

1. Kuraev A.A., Kovalev I.S., Kolosov S.V. Chislennye metody optimizacii v zadachah jelektroniki SVCh. Minsk: Nauka i tehnika, 1975. 296 s. (in Russ.)
2. Samarskij A.A., Vabishhevich P.N., Matus P.P. Raznostnye shemy s operatornymi mnozhiteljami. Minsk, 1998. 442 s. (in Russ.)
3. Kurayev A.A., Matveyenko V.V., Popkova T.L. Algorithms with Stabilizing Coefficients for Solving Poorly Determined Radiophysics Problems // Radiofizika i elektronika. 2016. Vol. 7, № 3. P. 5–10.
4. Kuraev A.A., Popkova T.L., Jaromenok S.I. Apparat T-funkcij dlja reshenija dvouhetochnyh kraevyh zadach v teorii nereguljarnyh volnovodov // Radiotehnika. 2004. № 9. S. 34–39. (in Russ.)
5. Kuraev A.A., Popkova T.L., Jaromenok S.I. T-funkcii dlja chetnyh chislenno-analiticheskikh metodov reshenija kraevyh zadach jelektrodinamiki // Vesti NAN Belarusi. 2005. № 2. S. 60–68. (in Russ.)
6. Kuraev A.A., Popkova T.L., Sinicyn A.K. Jelektrodinamika i rasprostranenie radiovoln. M., 2016. 424 s. (in Russ.)

### Сведения об авторах

Кураев А.А., д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры информационных радиотехнологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Матвеенко В.В., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры вычислительных методов и программирования Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Попкова Т.Л., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры информационных радиотехнологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

### Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,  
г. Минск, ул. П. Бровка, 6,  
Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники  
тел. +375-17-293- 89-56;  
e-mail: vladimir66@bsuir.by  
Матвеенко Владимир Владимирович

### Information about the authors

Kurayev A.A., D.Sci, professor, professor of information radiotechnologies department of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

Matveyenka V.V., PhD, associate professor, associate professor of computational methods and programming department of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

Popkova T.L., PhD, associate professor, associate professor of information radiotechnologies department of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

### Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,  
Minsk, P. Brovka, st., 6,  
Belarusian state university of  
informatics and radioelectronics  
tel. +375-17-293- 89-56;  
e-mail: vladimir66@bsuir.by  
Matveyenka Vladimir Vladimirovich