КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.677

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

В.М. ИЛЬИН

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 27 февраля 2017

Аннотация. Предложен алгоритм расчета вещественной части комплексных корней уравнений на основе кратких эквивалентных уравнений с коэффициентами в виде сумм и произведений корней.

Ключевые слова: укороченные уравнения, разделение, пары корней, дискриминанты, проверка решений.

Abstract. The calculating algorithm of the real part of the complex roots of equations on the basis of brief equivalent equations with coefficients in the form of roots' sums and products is proposed.

Keywords: truncated equations, separation, pairs of roots, discriminants, verification of solutions.

Doklady BGUIR. 2017, Vol. 104, No. 2, pp. 92-95
Definition of complex roots of the fourth degree algebraic equation
V.M. Ilyin

Некоторые особенности уравнений с комплексными корнями

Для категории уравнений с комплексными корнями, как и для уравнений с вещественными корнями, [1, 2], характерна парность корней. Учет этого дает возможность упростить решение уравнений, основываясь в обоих случаях на кратких, или укороченных уравнениях, содержащих только суммы и произведения корней заданных алгебраических уравнений. Алгебраические уравнения широко используются при анализе устойчивости работы различных устройств автоматики и электронной техники, работающих на различных частотах [3].

Отличительной особенностью алгебраических уравнений с комплексными корнями является то, что и сумма, и произведение сопряженных комплексных корней являются вещественными величинами [4, 5], следовательно, к ним применим метод арифметических прогрессий для отыскания комплексных корней. К тому же, только из суммы и произведений комплексных корней образуются все коэффициенты задаваемых алгебраических уравнений, производных от них. Это указывает на то, что к уравнениям более высоких, чем 4, степеней также применим метод арифметических прогрессий.

Пример определения комплексных корней алгебраических уравнений

Дано уравнение [5]:

$$x^4+2x^3+3x^2-2x+1 = 0. \qquad (1)$$

Решение численным методом осуществлялось в следующей последовательности.

1. Преобразовывалась переменная x.

2. Решалось вспомогательное кубическое уравнение для получения так называемой кубической резольвенты – некоторого корня кубического уравнения.

3. С помощью резольвенты преобразованное заданное уравнение представлялось в виде двух квадратных уравнений, решение которых давало четыре комплексных корня.

Для решения уравнений более высоких степеней этот алгоритм не рассматривался.

В данной статье показана более простая возможность решения уравнений четвертой степени с комплексными корнями. При этом используются два укороченных уравнения, вещественные коэффициенты которых – это функции суммы 2 и произведения 1 корней заданного уравнения (1), т.е. $C = 2$, П = 1.

Порядок построения прогрессий для определения вещественных величин, входящих в комплексные корни, следующий:

$$\begin{array}{lc|ccccc}
\text{первая прогрессия} & - & C_1-p & p & C_1=C/2p & p & C_1+p \\
\text{вторая прогрессия} & & C_1/2-p & p & C_1/2 & p & C_1/2+p \\
\hline
\text{третья прогрессия} & & C_1/2 & 0 & C_1/2 & 0 & C_1/2
\end{array} \qquad (2)$$

Учитывая, что C_1= П = 1, можно конкретизировать прогрессии:

$$\begin{array}{c|ccccc}
- & 1-p & p & 1 & p & 1+p \\
 & 0{,}5-p & p & 0{,}5 & p & 0{,}5+\mathrm{p} \\
\hline
 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5
\end{array} \qquad (3)$$

Характерно, что обе верхние прогрессии (2) и (3) имеют всегда одинаковые разности p. При p = 1,6 крайние члены первой прогрессии (2) это –0,6 и 2,6, сумма которых равна C = 2. Сумма их абсолютных величин: [–0,6]+2,6 = 3,2 и [–1,1]+2,1 = 3,2. Таким образом, p = 3,2:2 = 1,6. Кроме того, исследование зависимости корней от p показало, что только при p = 1,6 и вещественные части корней, и вещественные коэффициенты их мнимых частей соответствуют заданным в исходном алгебраическом уравнении (1) величинам C и П. Поэтому заданному уравнению (1) соответствуют два укороченных уравнения:

$$x^2+2{,}6x+4{,}33 = 0,$$
$$x^2-0{,}6x+0{,}23 = 0, \text{ где [4]:} \qquad (4)$$

$$4{,}33 = \frac{2{,}6}{0{,}6};\ 4{,}33\times 0{,}23 = 1 = \text{П}.$$

Таким образом, укороченные уравнения (4) осуществляют связь вещественных коэффициентов C и П, оба они отвечают условиям получения комплексных корней. Проверка: $(x^2+2{,}6x+4{,}33)(x^2-0{,}6x+0{,}23) = x^4+2x^3+3x^2-2x+1 = 0$, как и заданное уравнение (1). Их решение:

$$x_{12}=-1{,}3\pm\sqrt{1{,}69-4{,}33}=-1{,}3\pm 1{,}625\mathrm{j},$$
$$x_{34}=0{,}3\pm\sqrt{0{,}09-0{,}23}=0{,}3\pm 0{,}375\mathrm{j}. \qquad (5)$$

Следовательно, достаточной основой для определения комплексных корней являются их сумма C и произведение П – две вещественные функции.

Рассмотрим также второй вариант решения заданного уравнения (1). Выше отмечалось, что сумма и произведение сопряженных комплексных корней – это вещественные величины и что к их нахождению применим метод арифметических прогрессий.

Прогрессию сумм корней можно представить как:

$$\begin{array}{c|ccccc}
- & -0{,}6 & 1{,}6 & 1 & 1{,}6 & 2{,}6 \\
 & -1{,}1 & 1{,}6 & 0{,}5 & 1{,}6 & 2{,}1 \\
\hline
 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5
\end{array}$$

Меняем в ней местами крайние члены первой строки и одновременно ее разность берем равной p = 1,6:(1+1) = 0,8, где (1+1) = С/2+П, а средняя величина первой строчки (–1,3+0,3):2 = –0,5. Получаем прогрессию:

$$\begin{array}{c|ccccc}
- & -1{,}3 & 0{,}8 & -0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}3 \\
 & -1{,}05 & 0{,}8 & -0{,}25 & 0{,}8 & 0{,}55 \\
\hline
 & -0{,}25 & 0 & -0{,}25 & 0 & -0{,}25
\end{array}$$

Крайние члены –1,3 и 0,3 первой строки этой прогрессии являются вещественными частями комплексных корней.

Составляем далее прогрессию произведений корней:

–	0,23	2,05	2,28	2,05	4,33
	–0,91	2,05	1,14	2,05	3,19
	1,14	0	1,14	0	1,14

Преобразуем эту прогрессию так, чтобы ее разность была равной p = 2,05: (2,28+1) = 0,625, а средняя величина первой строки была равна 1:

–	0,375	0,625	1	0,625	1,625
	–0,125	0,625	0,5	0,625	1,125
	0,5	0	0,5	0	0,5

Здесь 1,625 и 0,375 это вещественные коэффициенты мнимой части корней. Комплексные корни, следовательно, такие же как и в предыдущем расчете, т.е. x_{12}= –1,3±1,625j, и x_{34}= 0,3±0,375j. При этом очевидна связь: $\frac{1,625}{1,3} = \frac{0,375}{0,3}$.

Прежними будут и укороченные уравнения, содержащие их. Здесь также эффективно применение арифметических прогрессий.

Заключение

Из уравнения (4) очевидна роль укороченных уравнений: не только трехчленных, как при определении вещественных корней, но даже двухчленных уравнений. Эти уравнения содержат коэффициенты только простейшие: суммы и произведения корней, что позволяет использовать их для определения корней вещественных и комплексных, степени не только четвертой, но и большей с помощью алгоритмов укорочения, т.е. более совершенного метода, чем использование кубической резольвенты.

Отрицательный дискриминант укороченного уравнения, как отмечено выше, однозначно указывает на то, что это уравнение содержит комплексный корень (или корни), что отрицательный дискриминант будет только при положительном свободном члене квадратного алгебраического уравнения.

Список литературы

1. Ильин В.М. Применение арифметических прогрессий для решения алгебраических уравнений высоких степеней // Докл. БГУИР. 2014. № 3 (81). С. 112–117.
2. Ильин В.М. Метод решения алгебраических уравнений высоких степеней, основанный на применении арифметических прогрессий // Докл. БГУИР. 2015. № 3 (89). С. 90–95.
3. Валенко В.С., Хандогин М.С. Электроника и микросхемотехника. Минск: БГУИР, 2000. 320 с.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб: Лань, 2008. 432 с.
5. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1964. 772 с.

References

1. Il'in V.M. Primenenie arifmeticheskih progressij dlja reshenija algebraicheskih uravnenij vysokih stepenej // Dokl. BGUIR. 2014. № 3 (81). S. 112–117. (in Russ.)
2. Il'in V.M. Metod reshenija algebraicheskih uravnenij vysokih stepenej, osnovannyj na primenenii arifmeticheskih progressij // Dokl. BGUIR. 2015. № 3 (89). S. 90–95. (in Russ.)
3. Valenko V.S., Handogin M.S. Jelektronika i mikroshemotehnika. Minsk: BGUIR, 2000. 320 s. (in Russ.)
4. Kurosh A.G. Kurs vysshej algebry. SPb: Lan', 2008. 432 s. (in Russ.)
5. Ango A. Matematika dlja jelektro- i radioinzhenerov. M.: Nauka, 1964. 772 s. (in Russ.)

Сведения об авторе

Ильин В.М., к.т.н., профессор, Почетный ректор Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,
г. Минск, ул. П. Бровки, д. 6,
Белорусский государственный
университет информатики и радиоэлектроники
тел. +375-17-293-21-18;
e-mail: srf@bsuir.by;
Ильин Виктор Макарович

Статья представлена в авторской редакции.

Information about the author

Ilyin V.M., PhD, professor, Honorary rector of Belarusian state university of informatics and radioelectronics.

Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,
Minsk, P. Brovka st., 6,
Belarusian state university
of informatics and radioelectronics
tel. +375-17-293-21-18;
e-mail: srf @bsuir.by;
Ilyin Victor Makarovich