

УДК 681.3

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ-ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Е.И. СУКАЧ

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
Советская 104, Гомель, 246019, Беларусь

Поступила в редакцию 7 марта 2012

Рассматривается методика оценки вероятностных характеристик надежности многокомпонентных сложных систем, имеющих два входа и два выхода, по вероятностным характеристикам надежности их компонентов. Методика является универсальной и допускает переход к расчету точных вероятностных характеристик надежности систем с любым числом входов и выходов.

Ключевые слова: вероятностно-алгебраическое моделирование, структурно-сложная система, сетевая надежность, вероятностные оценки надежности.

Введение

При расчете надежности сложных систем, имеющих вероятностные параметры функционирования, как правило, учитывается надежность составляющих их компонентов, которая определяется временем наработки на отказ или вероятностью отказа за оговоренный период времени. Зачастую уровни надежности разных компонентов значительно отличаются, что отражается на результирующих показателях надежности системы.

Для оценки и прогнозирования надежности многокомпонентных сложных систем (производственных, вычислительных, транспортных) используются различные математические модели, позволяющие описать структуру и оценить функционирование исследуемых систем в динамике. Большой класс моделей основан на математических методах, при которых многокомпонентная сложная система формализуется в виде графовой структуры [1–3], имеющей один вход (начальная вершина) и один выход (конечная вершина). Это ограничивает применение моделей при рассмотрении систем со множеством входов и выходов. В работах [4, 5] рассматривается метод оценки вероятностных характеристик графовых структур со множеством входов и выходов, основанный на согласованном использовании метода Монте-Карло и аналитических расчетов. Метод с достаточной точностью, приемлемой для выбранной предметной области, обеспечивает нахождение приближенного решения практических задач, связанных с управлением транспортными системами сообщения. Однако, решение задач оценки надежности систем, образом которых являются графовые структуры со множеством входов и выходов, требует точных расчетов, позволяющих с полной уверенностью гарантировать безотказность работы систем в условиях вероятностного изменения показателей надежности их компонентов. Поэтому является актуальной и практически востребованной разработка методов и программных средств автоматизации, позволяющих получать точные вероятностные оценки надежности графовых систем со множеством входов.

В статье описывается методика оценки вероятностных характеристик надежности многокомпонентных структурно-сложных систем, интерпретируемых как четырехполюсники, то есть имеющих два входа и два выхода. Методика разработана в рамках вероятностно-алгебраического подхода [6] и обеспечивает определение точных оценок исследуемого показателя надежности, представляющих собой вектора вероятностей результирующих состояний

систем, имеющих два входа и два выхода. Элементарные вычисления позволяют получить вероятностные оценки исследуемого показателя надежности для различных сочетаний заданных входов и выходов.

Универсальность методики заключается в возможности ее распространения на случаи оценки надежности n -полюсников ($n > 4$), структурные компоненты которых имеют как два состояния (работа, отказ), так и конечное множество состояний, характеризующее различные уровни исследуемого показателя надежности. В случае рассмотрения множества состояний компонентов, составляющих четырехполюсник, применяется методика оценки надежности структурно сложных систем, основанная на сведении модели системы со многими состояниями к совокупности бинарных моделей с двумя состояниями [7], разработанная, теоретически обоснованная и реализованная для оценки надежности систем с одним входом и одним выходом.

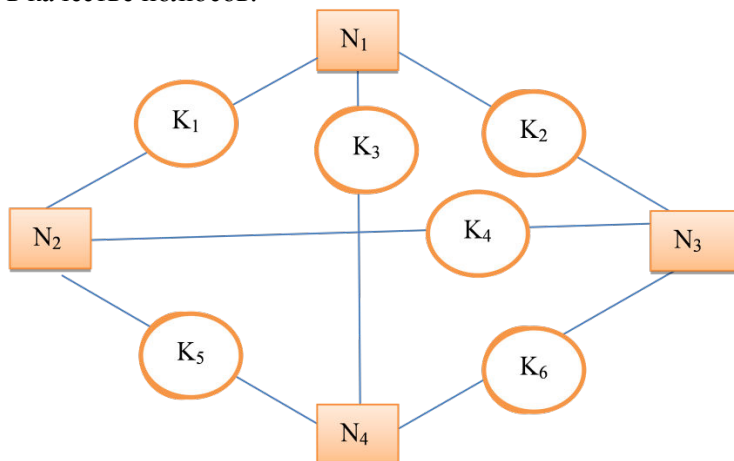
Практическая значимость методики заключается в возможности исследования вероятностных характеристик надежности большого класса электротехнических систем, которые представляются в виде графов, имеющих два входа и два выхода.

Формальное описание объекта исследования

Объектом исследования является многокомпонентная сложная система. Связи между ее компонентами определяют графовую структуру $G(N, K)$, являющуюся образом исследуемой системы. Предполагается, что компонентам системы соответствуют ребра графа $K = \{K_i\}, i = \overline{1, m}$, имеющие вероятностные значения показателей надежности. Связи между компонентами $N = \{N_v\}, v = \overline{1, l}$ считаются абсолютно надежными и представляются вершинами графа.

В графе выделяются четыре вершины $N_1, N_2, N_3, N_4 \in N$, две из которых описывают вход в систему $N_1, N_2 \in N$, а две оставшиеся $N_3, N_4 \in N$ задают выход из системы.

Простейшая схема системы-четырёхполюсника, представляется полным графом, изображенным на рисунке. В общем случае схема системы-четырёхполюсника представляется произвольным графом, имеющим конечное число ребер и конечное число вершин, четыре из которых выбраны в качестве полюсов.


















Графовая схема системы-четырёхполюсника

Как видно из рисунка, граф имеет четыре вершины и описывает систему, включающую шесть компонентов, то есть $N = \{N_v\}, v = \overline{1, 4}, K = \{K_i\}, i = \overline{1, 6}$. Поскольку система является четырехполюсником, то имеются два входа и два выхода. На рисунке входам соответствуют вершины $N_1, N_2 \in N$, а выходам — $N_3, N_4 \in N$.

Поскольку рассматривается система, компоненты которой характеризуются вероятностными значениями работоспособности, то она может находиться в одном из 15 состояний $S = \{S_j\}, j = \overline{1, 15}$, характеризующих уровни ее работоспособности (надежности). В графе им со-

ответствуют множество компонент связности. В таблице представлены состояния системы и их графическая интерпретация.

Таблица. Описание состояний надежности системы-четырёхполюсника

Состояние	Графическая интерпретация	Представление в виде множества связных вершин
S_1		$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$
S_2		$\{\{1,2\}, \{3\}, \{4\}\}$
S_3		$\{\{1,3\}, \{2\}, \{4\}\}$
S_4		$\{\{1,4\}, \{2\}, \{3\}\}$
S_5		$\{\{2,3\}, \{1\}, \{4\}\}$
S_6		$\{\{1,2,3\}, \{4\}\}$
S_7		$\{\{1,4\}, \{2,3\}\}$
S_8		$\{\{2,4\}, \{1\}, \{3\}\}$
S_9		$\{\{1,3\}, \{2,4\}\}$
S_{10}		$\{\{1,2,4\}, \{3\}\}$
S_{11}		$\{\{3,4\}, \{1\}, \{2\}\}$
S_{12}		$\{\{1,2\}, \{3,4\}\}$
S_{13}		$\{\{1,3,4\}, \{2\}\}$
S_{14}		$\{\{2,3,4\}, \{1\}\}$
S_{15}		$\{1,2,3,4\}$

Например, состояние S_2 характеризует состояние системы-четырёхполюсника, у которой функционирует компонент K_1 . Соответственно в графе присутствует связь между вершинами N_1 и N_2 . Состояние S_6 определяет состояние системы, у которой функционируют компоненты K_1, K_2, K_4 , что означает наличие связи в графе между узлами $N_1, N_2, N_3 \in N$. Аналогично описываются все состояния, соответствующие различным вариантам функционирования системы.

Возвращаясь к графической интерпретации системы, можно констатировать, что граф $G(N, K)$ является взвешенным, поскольку его ребра, являющиеся образом компонентов, имеют веса x_i , соответствующие возможным состояниям работоспособности (надежности) компонентов $S = \{S_j\}, j = \overline{1, 2}$. Веса ребер графа $G(N, K)$ принимают следующие значения $x_i = 1 \vee 0$. При $x_i = 1$ компонент K_i функционирует и в графе существует ребро, которое соединяет соответствующие вершины графа. При $x_i = 0$ компонент K_i отказал и в графе нет связи между соответствующими вершинами графа. Вероятности функционирования компонентов $K = \{K_i\}, i = \overline{1, m}$ системы известны и определяют вероятностную меру весов ребер:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } q_i \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - q_i \end{cases} \quad (1)$$

Таким образом, $G(N, K)$ является случайным графом, имеющим множество реализаций в виде детерминированных графов. Матрица смежности, описывающая случайный граф (рисунок) имеет вид:

$$MSX = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ x_2 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_3 & x_5 & x_6 & 0 \end{pmatrix},$$

где $x_i, i = \overline{1,6}$ – переменные, принимающие одно из возможных значений (0 или 1) при реализациях случайного графа.

Поскольку граф является образом системы-четырёхполюсника, то каждой его реализации соответствует одно из возможных 15 состояний системы, имеющее свою вероятность, которая зависит от вероятностей весов его ребер. Число реализаций случайного графа зависит от количества его ребер и числа возможных значений их весов. В графе, представленном на рисунке, имеется шесть ребер и их веса могут принимать два возможных значения $x_i = 1 \vee 0$, поэтому число всех реализаций случайного графа будет $2^6=64$.

Каждой k -ой реализации $G_k(N, K)$ случайного графа $G(N, K)$ поставим в соответствие значение связности \dot{J}_k , характеризующее вариант связи вершин-полюсов детерминированного графа $G_k(N, K)$ и позволяющее интерпретировать граф как состояние $S = \{S_j\}, j = \overline{1,15}$ исследуемой системы.

Для двух граничных состояний исследуемой системы S_1 (отказ) и S_{15} (полная работоспособность) значение связности $\dot{J}_k = 0 \vee 1$. При этом для k -ых реализаций $G_k(N, K)$ графа, описывающих эти состояния выполняется свойство \dot{J}_k -связности, которое означает наличие пути, соединяющего четыре вершины $N_1, N_2, N_3, N_4 \in N$ в графе, в котором веса ребер удовлетворяют условию $\min_i(x_i) \geq \dot{J}_k$.

Таким образом, будем считать, что система находится в состоянии надежности S_1 (отказ), если ее графическим образом является 0-связный граф. Реализации случайного графа, для которых выполняется свойство 0-связности, принадлежат множеству $G_0 = \{G_0(N, K)\}$ и описывают варианты отказа исследуемой системы.

Если для k -ой реализации случайного графа, выполняется свойство 1-связности, то будем считать, что система находится в S_{15} состоянии (полная работоспособность). При этом все реализации случайного графа образуют множество $G_1 = \{G_1(N, K)\}$, описывающее варианты реализации надежной работы исследуемой системы. Для таких графов всегда существует путь, соединяющий четыре вершины, являющиеся полюсами, все ребра которого имеют веса $x_i = 1$.

Очевидно, что для исследуемой системы-четырёхполюсника, имеется множество промежуточных результирующих состояний, описывающих варианты частичного функционирования системы, которым при формализации сопоставимы k -ые реализации случайного графа $G_k(N, K)$, дающие значение связности $\dot{J}_k = \overline{2,14}$. При этом k -ые реализации случайного графа будут отнесены к одному из множеств $G_{pr} = \{G_{pr}(N, K)\}, pr = \overline{2,14}$.

Ставится задача определения вектора вероятностей состояний надежности исследуемой системы, имеющей два входа и два выхода:

$$P^s = (p_1^s, p_2^s, \dots, p_{15}^s), \sum_{j=1}^{15} p_j^s = 1. \quad (2)$$

Состояния системы идентифицируются в результате определения значений связности \dot{J}_k возможных реализаций графа $G(N, K)$. Вероятности каждого из состояний определяются интегральной вероятностью реализаций графа, дающих \dot{J}_k -ое значение связности и образующих в совокупности одно из следующих множеств: $G_1 = \{G_1(N, K)\}$, $G_0 = \{G_0(N, K)\}$, $G_{pr} = \{G_{pr}(N, K)\}, pr = \overline{2,14}$.

Методика определения вероятностных состояний надежности систем-четырёхполюсников по вероятностным состояниям надежности их компонентов

Оценка вероятностей состояний надежности систем-четырёхполюсников реализуется с использованием системы вероятностно-алгебраического моделирования (Probability-Algebraic Simulation, PALS) [8] следующей последовательностью шагов.

Шаг 1. Формулируется постановка задачи расчета показателя надежности многокомпонентной системы путем вербально-графического описания условий ее функционирования и отказа. С этой целью определяется множество элементарных компонентов $K = \{K_i\}, i = \overline{1, m}$ исследуемой системы, задается число возможных состояний надежности компонентов $S = \{S_j\}, j = \overline{1, 2}$, и устанавливаются связи между компонентами, которые определяют характер взаимодействия компонентов.

Компонентам сопоставляются ребра графа, а местам их связи ставятся в соответствие вершины. Определяются две вершины, являющиеся входом в систему и две вершины, определяющие выходы из системы. Графическая схема исследуемой системы $G(N, K)$ формируется в диалоговом режиме с использованием стандартных графических примитивов: вершин и ребер.

Шаг 2. Определяются пути получения исходных данных вероятностных параметров компонентов разрабатываемой графовой модели системы. Как правило, исходные данные формируются на основе натуральных экспериментов с прототипом исследуемой системы или путем анализа экспертных оценок. В результате для каждого компонента соответственно выделенным состояниям $S = \{S_j\}, j = \overline{1, 2}$, задаются значения вероятностей надежной работы (1).

Шаг 3. Определяется состав выходных данных, представляющих собой вероятностные значения состояний надежности системы (2) с учетом выбранного состава вершин-полюсов и обосновываются способы их получения. Формулируется смысловое содержание выходных данных для системы и групп компонентов.

Шаг 4. С использованием специализированных программных средств системы PALS осуществляется ввод подготовленных данных (структурных схем, параметров), необходимых для начала моделирования. При этом автоматизируется ввод исходных данных, контролируется корректность полученной информации, а результаты контроля выдаются пользователю для устранения ошибок в режиме «вопрос–ответ». Стандартизирована возможность получения данных из заранее подготовленных файлов с возможностью их редактирования и сохранения.

Шаг 5. Строится k -ая реализация случайного графа, аналитическим выражением которой является матрица MSX_k , в которой переменным x_i присвоено одно из возможных значений (1 или 0).

Шаг 6. Организуется итерационный процесс транзитивного замыкания графа [9], который заключается в формировании графа достижимости, то есть определении для каждой вершины графа множества достижимых из нее вершин по путям длины 0, 1, 2 и т.д. Поскольку исходный граф G задается своей матрицей смежности MSX_k , то формирование матрицы смежности графа достижимости реализуется по формуле:

$$MSX_G^h = (MSX_k + E_n)^h,$$

где MSX_G^h – матрица смежности транзитивного замыкания графа G , E_n – единичная матрица размерности $n \times n$, h – степень, возведение в которую обеспечивает транзитивное замыкание графа G . При этом на каждом очередной l -ой ($l = \overline{1, h}$) итерации транзитивного замыкания реализуются преобразования элементов полученной матрицы MSX_G^l по формуле:

$$msx_G^l[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{если } msx_G^l[i, j] \geq 1 \\ 0, & \text{если } msx_G^l[i, j] < 1 \end{cases}$$

Очевидно, что элементы преобразованной матрицы смежности MSX_G^l либо остаются без изменения, либо увеличиваются на 1, аналитически указывая на вершины графа (полюсы или внутренние вершины), в которые можно попасть за l шагов по ребрам графа имеющим веса

$x_i=1$. Так, после первой итерации процесса замыкания, в матрице смежности MSX_G^1 элементы увеличиваются на 1 в столбцах, соответствующих вершинам графа, в которые можно попасть за два шага. Аналогично, в матрице смежности MSX_G^2 элементы увеличиваются на 1 в столбцах, соответствующих вершинам графа, в которые можно попасть за три шага и т.д.

Критерием остановки итерационного процесса транзитивного замыкания матрицы смежности является формирование матрицы MSX_G^h , сумма элементов которой выше главной диагонали остается неизменной, то есть выполняется условие:

$$\forall i, j, \text{ где } i < j \quad \sum_{i,j} msx_G^{h-1}[i, j] = \sum_{i,j} msx_G^h[i, j].$$

В том случае, если система представляется ориентированным графом, для транзитивно-го замыкания достаточно возвести матрицу смежности в $(n-1)$ -ую степень [9], то есть $h=(n-1)$. Матрица смежности на конечном h -ом шаге однозначно определяет состояние связности j графа $G(N, K)$ для заданных вершин-полюсов и позволяет отнести k -ую реализацию случайного графа к одному из возможных состояний $S = \{S_j\}, j = \overline{1, 15}$. В частности, если выполняется условие $\forall i, j, \text{ где } i < j \quad msx_G^h[i, j] = 1$, то k -ой реализации случайного графа соответствует состояние S_{15} исследуемой системы, при котором она полностью надежна.

Шаг 7. Организуется вычисление вероятности p_k состояния $S_j, j = \overline{1, 15}$, соответствующего k -ой реализации случайного графа по формуле $p_k = \prod_{i, x_i=1} q_i \cdot \prod_{i, x_i=0} (1 - q_i)$.

Шаг 8. Формируются интегральные вероятностные оценки состояний надежности четырехполюсника. Для получения вероятностной оценки состояния $S_j, j = \overline{1, 15}$ используется формула:

$$P(S_j) = \sum p_k, \text{ где } k, G_k(N, K) \in G_w, w = \begin{cases} 0, j = 1 \\ 1, j = 15 \\ pr, j = pr = \overline{2, 14} \end{cases}.$$

Очевидно, что сумма вероятностей всех состояний надежности четырехполюсника будет равна 1, то есть $\sum_{j=1}^{15} P(S_j) = 1$.

Шаг 9. Результаты расчета графически отображаются в виде графиков, представляющих вероятностные значения состояний надежности четырехполюсника. Одновременно данные сохраняются в файле одного из стандартных форматов для последующей статистической обработки и анализа.

Шаг 10. Определяется влияние вероятностных значений состояний надежности компонентов системы на значение компонентов вектора откликов всей системы при ее фиксированной структурной организации. С этой целью организуются модельные эксперименты, в которых варьируются значения вероятностей (1).

Шаг 11. Исследуется влияние структурной организации системы на результирующий вектор вероятностей состояний при неизменных вероятностных значениях параметров компонентов. Сравнение результирующих векторов вероятностей состояний надежности системы для различных вариантов ее структурной организации позволяет обосновать выбор лучшего из них, оценить эффективность резервирования отдельных участков системы и изменения состояний надежности системы в результате аварийного состояния отдельных участков.

Заключение

Таким образом, разработан нетривиальный аппарат, который с целью оценки работоспособности (надежности) системы, имеющей два входа и два выхода, позволяет интерпрети-

ровать ее в виде четырехполюсника и рассчитать результирующие вероятности состояний системы по вероятностям работоспособности составляющих ее компонентов.

Предложенная методика расширяет свойство прогностичности моделей структурно-сложных систем с одним входом и одним выходом при оценке их надежности и позволяет решать следующие задачи:

- оценка вероятностных характеристик надежности систем-четырёхполюсников на основе вероятностных состояний их компонентов;
- выявление множества отдельных компонентов и их комбинаций, оказывающих существенное влияние на вероятностные значения выбранного показателя надежности исследуемых систем;
- получение, обоснование и оптимизации различных проектных, эксплуатационных и управленческих решений на основе результатов расчета.

THE METHOD OF ESTIMATING THE PROBABILITY CHARACTERISTICS OF QUADRUPOLE RELIABILITY

E.I. SUKACH

Abstract

The technique estimates the probability characteristics of the reliability of multicomponent complex systems with two inputs and two outputs, by the probabilistic characteristics of the reliability of their components. The technique is versatile and allows for a transition to the calculation of exact probability characteristics of systems reliability with any number of inputs and outputs.

Список литературы

1. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем. СПб., 2007.
2. *Можжаев А.С.* Труды третьей Международной научной школы «Моделирование и Анализ Безопасности и Риска-2003». СПб., 2003.
3. *Sahinoglu M., Benjamin R.* Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics. 2010. Vol. 2. P. 189–211.
4. *Максимей И.В., Сукач Е.И., Гируц П.В.* Математические машины и системы. 2008. №2. С.128–136.
5. *Сукач Е.И.* Реєстрація, зберігання і обробка даних (Data Recording, Storage & Processing). 2008. Т.10, №3. С. 37–45.
6. *Сукач Е.И.* // Проблемы управления и информатики. 2011. №2. С.121–131.
7. *Сукач Е.И.* Информатика. 2011. №3. С.13–22.
8. *Сукач Е.И., Демуськов А.Б., Ратобильская Д.В.* // Математические машины и системы. 2011. №3. С. 32–39.
9. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. М., 1984.